

14 Regression & KQ-Prinzip

Lösung zu Aufgabe 24

$$X'X = \begin{pmatrix} n & \sum_{i=1}^n x_{i1} & \sum_{i=1}^n x_{i2} & \cdots & \sum_{i=1}^n x_{ip} \\ \sum_{i=1}^n x_{i1} & \sum_{i=1}^n x_{i1}^2 & \sum_{i=1}^n x_{i1}x_{i2} & \cdots & \sum_{i=1}^n x_{i1}x_{ip} \\ \sum_{i=1}^n x_{i2} & \sum_{i=1}^n x_{i2}x_{i1} & \sum_{i=1}^n x_{i2}^2 & \cdots & \sum_{i=1}^n x_{i2}x_{ip} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{i=1}^n x_{ip} & \sum_{i=1}^n x_{ip}x_{i1} & \sum_{i=1}^n x_{ip}x_{i2} & \cdots & \sum_{i=1}^n x_{ip}^2 \end{pmatrix}$$

$$X'Y = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n y_i \\ \sum_{i=1}^n x_{i1}y_i \\ \sum_{i=1}^n x_{i2}y_i \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^n x_{ip}y_i \end{pmatrix}$$

Lösung zu Aufgabe 25

(a) **Lineare Einfachregression**

vs.

Multiple lineare Regression

$$Y_i = \alpha + \beta x_i + \epsilon_i, i = 1, \dots, n$$

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \dots + \beta_p x_{ip} + \epsilon_i, i = 1, \dots, n$$

Dabei sind:

Y_i beobachtbare metrische Zufallsvariablen

x_i bzw. x_{ij} gegebene deterministische Werte oder Realisierungen einer metrischen Zufallsvariable X resp. X_j

ϵ_i unbeobachtbare Zufallsvariablen.

KQ-Prinzip für den multiplen Fall: $(Y - \beta X)'(Y - \beta X) \xrightarrow{\beta} \min$

$$\Rightarrow \hat{\beta} = (X'X)^{-1} X'Y$$

(b)

$$\hat{\beta} = (X'X)^{-1} X'y = \begin{pmatrix} 0.38 & -0.12 & -0.08 \\ -0.12 & 0.08 & 0.02 \\ -0.08 & 0.02 & 0.03 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 20 \\ 36 \\ 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0.8 \\ -0.4 \end{pmatrix}$$

Interpretation:

(c)

$$\hat{Y}_{2009} = X_{2009}\hat{\beta} = \begin{pmatrix} 1 & 7.3085 & 1.40 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0.8 \\ -0.4 \end{pmatrix} = 7.2868$$

Lösung zu Aufgabe 26

Dummykodierung

$$X'Y = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 58 \\ 40 \\ 33 \\ 47 \\ 11 \\ 42 \\ 55 \\ 37 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 323 \\ 178 \\ 53 \end{pmatrix}$$

$$X'X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 4 & 2 \\ 4 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$(X'X)^{-1} = \begin{pmatrix} 0.5 & -0.5 & -0.5 \\ -0.5 & 0.75 & 0.5 \\ -0.5 & 0.5 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow (X'X)^{-1}X'Y = \begin{pmatrix} 0.5 & -0.5 & -0.5 \\ -0.5 & 0.75 & 0.5 \\ -0.5 & 0.5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 323 \\ 178 \\ 53 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 46 \\ -1.5 \\ -19.5 \end{pmatrix} = \hat{\beta}_D$$

Effektkodierung

$$X'Y = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 58 \\ 40 \\ 33 \\ 47 \\ 11 \\ 42 \\ 55 \\ 37 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 323 \\ 86 \\ -39 \end{pmatrix}$$

$$X'X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 2 & 0 \\ 2 & 6 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$(X'X)^{-1} = \frac{1}{36} \begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ -2 & 8 & -4 \\ 1 & -4 & 11 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow (X'X)^{-1}X'Y = \frac{1}{36} \begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ -2 & 8 & -4 \\ 1 & -4 & 11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 323 \\ 86 \\ -39 \end{pmatrix} = \frac{1}{36} \begin{pmatrix} 1404 \\ 198 \\ -450 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 39 \\ 5.5 \\ -12.5 \end{pmatrix} = \hat{\beta}_E$$

Interpretation: