zugehörige Seiten in Fahrmeir et al. (2007): Kap. 9.1 - 9.3

Aufgabe 58

Die Stichprobenvariablen $X_1, \dots, X_n$ seien unabhängige, identisch verteilte Zufallsvariablen mit Erwartungswert μ und Varianz σ^2 .

- (a) Zeigen Sie, dass die Schätzfunktion

$$\tilde{S}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$$

für σ^2 , d.h. das Analogon der empirischen Varianz aus der deskriptiven Statistik nicht erwartungstreu ist.

- (b) Verwenden Sie das Ergebnis aus Teilaufgabe (a) um zu zeigen, dass die alternative Schätzfunktion

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$$

als Analogon der aus der deskriptiven Statistik bekannten Stichprobenvarianz eine erwartungstreue Schätzung für σ^2 ist.

Aufgabe 59

Zeigen Sie, dass eine im quadratischen Mittel konsistente Schätzfunktion auch schwach konsistent ist.

Aufgabe 60* (8 Punkte)

Gegeben sei eine Zufallsvariable X für die sowohl $E(X) = \mu$ als auch $Var(X) = \sigma^2$ existieren. Als Schätzfunktion für μ wurden von verschiedenen schlaun Statistikern die folgenden Vorschläge gemacht

$$\begin{aligned}\hat{\mu}_1 &= \bar{X} \\ \hat{\mu}_2 &= \bar{X} + 0.0001 \\ \hat{\mu}_3 &= \frac{n+1}{n} \bar{X}\end{aligned}$$

Sie können dabei davon ausgehen, dass die Stichprobenvariablen $X_1, \dots, X_n$ unabhängig und identisch wie X verteilt sind.

- (a) Überprüfen Sie die Schätzfunktionen auf ihre Erwartungstreue.
(b) Berechnen Sie für die Schätzfunktionen jeweils den MSE. Welche der Schätzer sind MSE-konsistent?
(c) Welche der Schätzfunktionen würden Sie favorisieren und warum?

Aufgabe 61

Es sei $(X_1, \dots, X_n)$ eine i.i.d. Stichprobe aus einer Poisson-verteilten Grundgesamtheit zum Parameter $\lambda > 0$.

- (a) Bestimmen Sie die Likelihood-Funktion und eine Maximum-Likelihood-Schätzung $\hat{\lambda}_1$ für λ .
- (b) Bestimmen Sie Momentenschätzungen $\hat{\lambda}_2$ und $\hat{\lambda}_3$ für λ , indem Sie das erste und das zweite Moment betrachten.
- (c) Wie lautet der MAP-Bayes-Schätzer $\hat{\lambda}_{MAP}$, falls Sie als a priori Dichte für λ eine Exponentialverteilung mit dem Hyperparameter $\nu > 0$ annehmen. Wann stimmen $\hat{\lambda}_1$ und $\hat{\lambda}_{MAP}$ überein? Zeigen Sie, dass $\hat{\lambda}_1$ und $\hat{\lambda}_{MAP}$ übereinstimmen, wenn Sie als a priori Dichte für λ eine stetige Gleichverteilung auf dem Intervall $[0, b]$ mit $b > 0$ annehmen.

Aufgabe 62* (8 Punkte)

Seien die Zufallsvariablen $X_1, \dots, X_n$ unabhängig identisch normalverteilt mit unbekanntem Erwartungswert μ und unbekannter Varianz σ^2 .

- (a) Zeigen Sie, dass

$$\hat{\mu}_{ML} = \bar{x} \quad \text{und} \quad \hat{\sigma}_{ML}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$$

die Maximum-Likelihood-Schätzer für μ und σ^2 sind.

- (b) Zeigen Sie, dass $\hat{\mu}_{ML}$ schwach konsistent ist.