

zugehörige Seiten in Fahrmeir et al. (2007): Kap. 9.2 - 9.5

Aufgabe 63

In einer Werkstatt werden Kraftfahrzeuge repariert. Die zufällige Reparaturzeit für die Behebung eines bestimmten Schadentyps kann als eine mit dem Parameter $\lambda > 0$ exponentialverteilte Zufallsgröße betrachtet werden. Die über einen konkreten Zeitraum unabhängig voneinander erfaßten Zeiten für n Reparaturen ergaben eine mittlere Reparaturdauer von 15 Zeiteinheiten.

Bestimmen Sie einen Schätzer für den unbekannten Parameter λ

- (a) nach der Momentenmethode und
- (b) nach der Maximum-Likelihood-Methode!

Untersuchen Sie die ermittelten Schätzer auf Erwartungstreue! Benutzen Sie dazu die *Jensen'sche Ungleichung*:

Sei X eine Zufallsvariable und $g : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine konvexe Funktion. Dann gilt

$$E[g(X)] \geq g(E[X]).$$

Ist g strikt konvex auf D und $\text{Var}(X) > 0$, so gilt sogar $E[g(X)] > g(E[X])$.

Klären Sie dabei zunächst die Anwendbarkeit der Jensen'schen Ungleichung ab!

Aufgabe 64

In einer Urne liegen s schwarze und $N - s$ rote Kugeln. Die Gesamtzahl N aller Kugeln sei bekannt. Wir möchten die unbekannte Anzahl $\vartheta = s$ der schwarzen Kugeln schätzen und ziehen dazu ohne Zurücklegen n Kugeln.

Bestimmen Sie den Maximum-Likelihood-Schätzer für ϑ .

Aufgabe 65

Seien $X_1, \dots, X_n$ unabhängig identisch gleichverteilt auf $[a, b]$ mit unbekanntem Parameter $\vartheta = (a, b)$.

- a) Bestimmen Sie den Maximum-Likelihood-Schätzer für ϑ .
- b) Untersuchen Sie diesen Schätzer auf Erwartungstreue.
- c) Bestimmen Sie den unbekannten Parameter $\vartheta = (a, b)$ mit der Momentenmethode.

Aufgabe 66* (8 Punkte)

Eine Grundgesamtheit bestehe aus einer bekannten Anzahl von N Elementen, von denen eine unbekannte Anzahl M die Eigenschaft E besitzt. Die Vorkenntnisse des Betrachters über den unbekannten Parameter $p = \frac{M}{N}$ lassen sich durch eine linear fallende Dichte

$$f(p) = \begin{cases} 2(1-p), & 0 \leq p \leq 1, \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

beschreiben. Aus der Grundgesamtheit wird eine iid Stichprobe vom Umfang $n = 4$ gezogen. Die relative Häufigkeit von E in der Stichprobe beträgt $\frac{3}{4}$. Bestimmen Sie die Dichte der a posteriori Verteilung für $0 \leq p \leq 1$. Wie lässt sich daraus ein Schätzer für p ermitteln?

Aufgabe 67* (8 Punkte)

Um zu überprüfen, ob die Wägungen mit einer Federwaage einen systematischen Fehler aufweisen, wird ein 10-Gramm-Gewicht 9 mal nachgewogen. Es ergaben sich die folgenden Werte (in g):

9.7 10.2 10.0 9.9 9.5 9.6 9.4 10.1 9.8

Erstellen Sie das 95%-Konfidenzintervall für das tatsächliche Gewicht unter der Voraussetzung, dass die Messergebnisse der Waage normalverteilt sind

- (a) mit einer Standardabweichung von $\sigma = 0.3$ g;
- (b) mit einer unbekannten Standardabweichung.