10 Einführung in die statistische Testtheorie

zugehörige Seiten in Fahrmeir et al. (2007): Kap. 10

Aufgabe 73

In einer Behörde mit sehr vielen Mitarbeitern hat der Behördenvorsteher den Verdacht, dass an einem normalen Arbeitstag weniger als 70 Prozent der Arbeitnehmer wirklich an ihrem Arbeitsplatz sind. Er möchte nun einerseits diesen Missstand bei der Verwaltung zur Sprache bringen, möchte aber auf der anderen Seite auf jeden Fall das Risiko so klein wie möglich halten, Ärger mit der einflussreichen Personalvertretung zu bekommen, der sich zwangsläufig bei einer ungerechtfertigten voreiligen Meldung ergeben würde. Stellen Sie aus der Sicht des Behördenvorstehers die Hypothesen für einen Test auf den wahren Anteil der an ihrem Arbeitsplatz befindlichen Arbeitnehmer auf!

Aufgabe 74

Der Verkaufsschlager der Edumm-Käserei ist ihr 1.000-g-Kugelkäse. In letzter Zeit häufen sich Beschwerden der Kunden, der Käse sei zu leicht. Die Käserei führt daraufhin (basierend auf einer einfachen Stichprobe von $n = 30$) einen statistischen Test zum Niveau $\alpha = 0.05$ auf das wahre mittlere Gewicht dieser Sorte Kugelkäse durch. Das Käsegewicht kann dabei als normalverteilt mit bekannter Varianz $\sigma^2 = 49[g^2]$ angenommen werden.

- (a) Formulieren Sie basierend auf einer Risikoüberlegung die Hypothesen für diesen Test. Erläutern Sie **inhaltlich** dasjenige Fehlentscheidungsrisiko, das bei diesem Test als weniger schwerwiegend eingeschätzt wird.
- (b) Welchen Test würden Sie durchführen? Begründung!
- (c) Berechnen und interpretieren Sie die zugehörige Gütefunktion an den Stellen $\mu_1 = 950$ und $\mu_2 = 1050$.
- (d) Nennen Sie das Testergebnis, falls die Realisation der Teststatistik nicht in den Ablehnungsbereich fällt! Interpretieren Sie dieses Testergebnis inhaltlich und statistisch exakt!
- (e) Erläutern Sie kurz, worin bei Verwendung eines weniger trennscharfen Tests der Nachteil läge!

Aufgabe 75

Im März 2003 wurde die Lungenkrankheit *SARS* zum ersten Mal diagnostiziert und breitete sich anschließend von China in zahlreiche andere Länder aus. Um die Todesrate von mit *SARS* infizierten Personen zu analysieren, seien in der folgenden Tabelle die Anzahl der Infizierten sowie die Anzahl der davon Gestorbenen für einige Regionen der Erde gegeben (Quelle: WHO, Stand 9. Juli 03):

Region	USA/Kanada	Europa	China/Hongkong	Asien ohne China/HK	Sonst.
Infizierte	324	34	7083	986	9
Gestorbene	38	0	646	127	1

Gehen Sie im Folgenden davon aus, dass die Anzahl der an *SARS* gestorbenen Personen binomialverteilt ist mit Parameter π und dass zwischen den infizierten Personen Unabhängigkeit gilt.

- (a) Berechnen Sie anhand der angegebenen Daten einen erwartungstreuen Schätzer (ohne Beweis) für den Parameter π .

Während der Diskussionen über die Sterblichkeit von *SARS* wurde gelegentlich vermutet, die Wahrscheinlichkeit an *SARS* zu sterben sei niedriger als die Wahrscheinlichkeit an einer "normalen" Lungenentzündung zu sterben.

- (b) Überprüfen Sie diese Vermutung mit einem geeigneten (approximativen) Test, wobei Sie davon ausgehen können, dass die Wahrscheinlichkeit an einer "normalen" Lungenentzündung zu sterben etwa 10 % beträgt. Welche Entscheidung ist anhand der Stichprobe bei einem Signifikanzniveau von $\alpha = 0.05$ zu treffen?
- (c) Berechnen und interpretieren Sie die Gütefunktion des in (b) durchgeführten Tests an den Stellen $\pi_1 = 0.09$ und $\pi_2 = 0.11$.
- (d) Berechnen und interpretieren Sie den p -Wert des in (b) durchgeführten Tests.

Aufgabe 76* (8 Punkte)

Ein berühmter Schokoriegel soll nach Angaben des Herstellers eine Länge von 10 cm aufweisen. Bei der eingesetzten Anlage kann davon ausgegangen werden, dass die Längen der produzierten Riegel unabhängig und identisch normalverteilt sind mit bekannter Varianz $\sigma^2 = 0.4 \text{ cm}^2$.

Sie haben den Verdacht, dass der Hersteller mit der Längenangabe übertreibt. Um dies zu testen haben Sie eine Stichprobe von $n = 20$ Schokoriegeln gekauft, aus der sich $\bar{x} = 9.8 \text{ cm}$ ergab. Formulieren Sie die Hypothesen und führen Sie einen geeigneten Test zum Signifikanzniveau $\alpha = 0.05$ durch. Bestätigt sich ihr Verdacht? Berechnen Sie den p -Wert des verwendeten Tests. Wie sieht Ihre Testentscheidung zum Signifikanzniveau $\alpha = 0.1$ aus?

Aufgabe 77* (8 Punkte)

Bei Ausgrabungen werden Skelettreste bestimmter ausgewachsener Tiere gefunden. Anhand von Messungen am Schädelknochen soll überprüft werden, ob es Tiere derjenigen Art sind, für die ein durchschnittliches Maß von $\mu_0 = 146$ bekannt ist. Zudem weiß man, dass die Varianz σ^2 derartiger Messungen 36 beträgt, und dass die Schädelmessungen Realisationen einer normalverteilten Zufallsvariable sind. An $n = 10$ Skeletten werden folgende Werte gemessen:

141, 140, 145, 135, 147, 141, 154, 138, 152, 149.

- (a) Testen Sie $H_0 : \mu = 146$ gegen $H_1 : \mu \neq 146$ zu einem Signifikanzniveau von $\alpha = 0.05$.
- (b) Bestimmen und interpretieren Sie den p -Wert des verwendeten Tests.
- (c) Leiten Sie die Gütefunktion des verwendeten Tests her. Bestimmen und interpretieren Sie die Gütefunktion an den Stellen $\mu_1 = 140$ und $\mu_2 = 150$. Wie ändert sich die Gütefunktion für $\alpha = 0.01$?

Aufgabe 78

Die Zeiten zwischen den Ankünften von Flugzeugen auf einem Flughafen (in Minuten) können als exponentialverteilt angesehen werden. Je größer der Parameter λ dieser Verteilung ist, desto häufiger wird der Flughafen angefliegen. Im Rahmen einer Untersuchung über die Fluglärmbelästigung ermitteln Anwohner 100 Zwischenankunftszeiten, die als unabhängig angesehen werden können.

- (a) Zunächst soll allgemein anhand einer Stichprobe von $n > 30$ gemessenen Zwischenankunftszeiten mittels eines statistischen Tests die Frage überprüft werden, ob λ größer ist als der offizielle Wert λ_0 . Dabei seien Mittelwert $\bar{X}$ sowie Stichprobenvarianz S^2 aus der Stichprobe geschätzt. Stellen Sie die Hypothesen auf und geben Sie eine geeignete Prüfgröße sowie die Entscheidungsregel an.
- (b) Die Stichprobe der Anwohner von 100 Zwischenankunftszeiten hat eine mittlere Zwischenankunftszeit von 7.5 Minuten bei einer Standardabweichung von ebenfalls 7.5 Minuten ergeben. Führen Sie nun den Test mit $\alpha = 0.05$ und $\lambda_0 = 0.1$ durch.