zugehörige Seiten in Fahrmeir et al. (2007): Kap. 12.2

Aufgabe 98

Der Verband Deutscher Automobilhersteller möchte die Nachfrage nach Automobilen mit Hilfe folgender Regressionsgleichung modellieren:

$$y_t = x_{t0}\beta_0 + x_{t1}\beta_1 + x_{t2}\beta_2 + \epsilon_t, \quad t = 1, \ldots, T,$$

mit

y_t	Automobilabsatz in Mio. Stück im Jahr t (logarithmiert),
x_{t0}	Variable, die in allen Perioden den Wert 1 annimmt,
x_{t1}	verfügbares Einkommen der privaten Haushalte in Mrd. Euro im Jahr t (logarithmiert),
x_{t2}	Benzinpreis, Super (bleifrei), in Euro/Liter im Jahr t.

(a) Schätzen Sie den Koeffizientenvektor β unter Verwendung folgender Ergebnisse:

$$(X'X) = \begin{bmatrix} 10 & 10 & 20 \\ 10 & 25 & 10 \\ 20 & 10 & 80 \end{bmatrix}, \; (X'X)^{-1} = \begin{bmatrix} 0.38 & -0.12 & -0.08 \\ -0.12 & 0.08 & 0.02 \\ -0.08 & 0.02 & 0.03 \end{bmatrix}, \; X'y = \begin{bmatrix} 20 \\ 36 \\ 16 \end{bmatrix}, \; y'y = 63.52.$$

Wie interpretieren Sie den geschätzten Koeffizienten $\hat{\beta}_2$

(b) Testen Sie die Nullhypothese $H_0 : \beta_1 = 0.7$ auf einem Signifikanzniveau von $\alpha = 0.10$ mit Hilfe eines zweiseitigen Tests. Welche Modellannahmen sind hierfür erforderlich?

(c) Stellen Sie ein Konfidenzintervall für β_1 zum Signifikanzniveau $\alpha = 0.10$ auf. Welchen Zusammenhang sehen Sie zu dem Test, den Sie unter (b) ausgeführt haben?

(d) Testen Sie auf einem Signifikanzniveau von $\alpha = 0.05$ mit einem einseitigen Test die Hypothese, dass der Benzinpreis keinen Einfluss auf die Nachfrage nach Automobilen besitzt. Nehmen Sie dabei $\sigma^2 = 0.1$ als bekannt an. Warum ist ein einseitiger Test sinnvoll?

(e) Für das Jahr $T + 1$ wird ein verfügbares Einkommen von 1493 Mrd. Euro und ein Benzinpreis von 1.01 Euro/Liter erwartet. Erstellen Sie ein 95% Prognoseintervall für den logarithmierten Autoabsatz y_{T+1}.

Aufgabe 99

Der Internetprovider Webspeed muss die Computerkapazitäten für das nächste Jahr planen. Hierfür muss insbesondere die Zahl der Internetkunden bei Webspeed prognostiziert werden. Dazu wird folgendes Modell verwendet:

$$y_t = x_{t0}\beta_0 + x_{t1}\beta_1 + x_{t2}\beta_2 + \epsilon_t, \quad \epsilon_t \sim N(0, \sigma^2), \quad Cov(\epsilon_s, \epsilon_t) = 0 \ \forall\, s \neq t,$$

wobei

y_t	die Anzahl der Internetkunden in Tsd.,
x_{t0}	eine Konstante mit Wert 1,
x_{t1}	den Preis pro Monat des größten Anbieters in Euro,
x_{t2}	den Preis pro Monat von Webspeed in Euro

angibt. Es liegen Daten für 24 Monate vor und

$$(X'X)^{-1} = \frac{1}{1000}\begin{bmatrix} 260.0 & 1.2 & 14.0 \\ 1.2 & 0.4 & -0.4 \\ 14.0 & -0.4 & 2.0 \end{bmatrix}, \quad X'y = 1000\begin{bmatrix} 0.3 \\ 2.0 \\ -2.5 \end{bmatrix}.$$

(a) Ein Firmenmitglied behauptet, dass sich bei einer Preissenkung beim größten Anbieter die Zahl der Internetkunden bei Webspeed substantiell verringern würde. Ist diese Aussage auf einem Signifikanzniveau von $\alpha = 0.05$ haltbar? Dabei sei $\sigma^2 = 10$ als wahrer Wert bekannt. Welche Konsequenzen ergeben sich daraus für die Verteilung der geschätzten Koeffizienten?

(b) Berechnen Sie ein Konfidenzintervall für β_2 zum Konfidenzniveau 0.95. Wie bisher sei $\sigma^2 = 10$ vorgegeben. Zu welchem Ergebnis kommen Sie hinsichtlich der Nullhypothese $H_0 : \beta_2 = -2$ auf Basis Ihres Konfidenzintervalls?

(c) Begründen Sie **formal und verbal**, ob sich Ihre Ergebnisse in (b) ändern würden, falls Sie die Fehlervarianz schätzen müssen und dabei einen Wert von $\hat{\sigma}^2 = 20$ erhalten.

(d) Überprüfen Sie die Nullhypothese, dass eine Preissenkung des größten Anbieters um 1 Euro exakt den entgegengesetzten Effekt hat wie eine Preissenkung um 1 Euro durch Webspeed. Legen Sie dabei ein Signifikanzniveau von $\alpha = 0.05$ zugrunde. Die geschätzte Fehlervarianz ist wie bisher $\hat{\sigma}^2 = 20$.

(e) Könnte sich Ihre Schlussfolgerung in (d) verändern, wenn Sie das Signifikanzniveau auf $\alpha = 0.01$ reduzieren? Wie lässt sich eine Reduktion des Signifikanzniveaus interpretieren?