

zugehörige Seiten in Fahrmeir et al. (2007): Kap. 5.2 - 5.4

Aufgabe 22

Von einer Eiersorte sei bekannt, dass von einer Packung mit sechs Eiern zwei Eier faul sind. Aus dieser Packung werden zufällig drei Eier ausgewählt und auf ihre Güte überprüft, d.h. in die Pfanne geschlagen.

- (a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass genau ein Ei faul ist?
- (b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass höchstens ein Ei faul ist?
- (c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass genau drei Eier faul sind?
- (d) Wieviele faule Eier kann man bei der Prüfung von drei Eiern erwarten?

Auf einer kleinen Hühnerfarm werden in einem langen Zeitraum mehr als 500 Eier produziert. Man weiß, dass mit 80%iger Wahrscheinlichkeit ein solches Ei gut, d.h. nicht faul ist. Es wird eine Lieferung von 20 dieser Eier bestellt bei Zufallsauswahl der Eier.

- (e) Wie groß ist approximativ die Wahrscheinlichkeit, dass mehr als zwei faule Eier in der Lieferung sind?
- (f) Berechnen Sie den Erwartungswert der Zufallsvariable „Anzahl der guten Eier in der Lieferung“.
- (g) Berechnen Sie approximativ die Wahrscheinlichkeit, dass genau 16 faule Eier in der Lieferung sind.

Aufgabe 23

Eine Zufallsvariable X heißt *negativ binomialverteilt* mit den Parametern r und p , wenn ihre Wahrscheinlichkeitsfunktion gegeben ist durch

$$P(X = n) = \binom{n-1}{r-1} p^r (1-p)^{n-r}, \quad n = r, r+1, \dots$$

Berechnen Sie den Erwartungswert von X .

Aufgabe 24

Für welchen Wert von p hat eine binomialverteilte Zufallsvariable $X \sim B(n, p)$ bei festem n maximale Varianz?

Aufgabe 25

Aus Erfahrung weiß man, dass bei einem Digitalcomputer eines bestimmten Typs die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten **keines** Fehlers während einer 12-stündigen Betriebszeit 0.7788 beträgt.

- (a) Welche Verteilung eignet sich zur näherungsweisen Beschreibung der Zufallsvariablen X : „Anzahl der Fehler innerhalb von 12 Stunden“?
- (b) Man bestimme die Wahrscheinlichkeit dafür, dass innerhalb von 12 Stunden mindestens zwei Fehler auftreten.
- (c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass bei vier (voneinander unabhängigen) Digitalcomputern desselben Typs innerhalb von 12 Stunden insgesamt genau ein Fehler auftritt?

Aufgabe 26* (10 Punkte)

Welche Verteilungen besitzen die folgenden Zufallsvariablen?

- (a) In einem Areal lebt eine unbekannte Anzahl N von Tieren. Um die Populationsgröße zu schätzen, verfahren Ökologen nach dem folgenden Schema: Zunächst fangen sie eine Zahl m von Tieren und markieren sie. Diese werden wieder frei gelassen. Man wartet ab, bis sie sich mit den übrigen gut durchmischt haben und fängt dann (zufällig) n Tiere ein. Angenommen alle Tiere werden mit gleicher Wahrscheinlichkeit gefangen. Sei X_1 die Anzahl der markierten Tiere in der Stichprobe.
- (b) Ein Klumpen einer radioaktiven Substanz besteht aus vielen Atomen, welche bei ihrem sehr seltenen Zerfall α -Teilchen ausstrahlen. X_2 sei die Anzahl emittierter α -Teilchen pro Zeitintervall.
- (c) Ein betrunkenen Nachtwächter hat einen Schlüsselbund mit 10 Schlüsseln und will eine Tür aufschließen, in deren Schloss genau einer dieser Schlüssel passt. Er probiert dazu einen zufällig ausgewählten Schlüssel aus. Passt er nicht, so fällt ihm der Schlüsselbund aus der Hand, die Schlüssel durchmischen sich und er wiederholt sein Vorgehen. X_3 sei die Anzahl der Versuche bis er den passenden Schlüssel findet.
- (d) Angenommen ein Münchner kennt jeden 1000. Einwohner persönlich. X_4 sei die Anzahl der Bekannten, die er auf einem Spaziergang trifft, wenn ihm 50 Münchner begegnet sind.
- (e) Ein Pfeifenraucher hat in jeder seiner beiden Hosentaschen eine Streichholzsachtel mit je N Streichhölzern. Immer wenn er ein Streichholz benötigt, entnimmt er es zufällig aus einer der beiden Taschen. Sei X_5 die Anzahl an Streichhölzern in der anderen Schachtel, wenn er feststellt, dass die erste Schachtel leer ist.

Aufgabe 27* (8 Punkte)

Jeden Morgen um 6 Uhr fährt Olaf zum Angeln an einen nahegelegenen Fluss. Die Wahrscheinlichkeit, dass er bei einem Besuch erfolgreich ist, beträgt konstant $p = 0.2$, wobei davon ausgegangen werden kann, dass die Erfolge an verschiedenen Tagen voneinander unabhängig sind.

- (a) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass Olaf an 7 Tagen
 - (i) genau 3 mal erfolgreich ist;
 - (ii) mehr als 1 mal erfolgreich ist.
- (b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass Olaf höchstens 4 mal zum Fluss fahren muss, bis er zum ersten Mal Erfolg hat?
- (c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass Olaf höchstens 4 mal zum Fluss fahren muss, bis er zwei Mal Erfolg hat?

Eines Tages sieht er staunend, dass sich eine sehr große Zahl von Anglern an "seinem" Fluss versammelt hat, so dass die Wahrscheinlichkeit für einen Erfolg pro Angler nun deutlich kleiner als $p = 0.2$ geworden ist. Die mittlere Zahl der erfolgreichen Angler pro Tag sei dabei 8.

- (d) Geben Sie ein geeignetes Verteilungsmodell für die Anzahl der erfolgreichen Angler pro Tag an und bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens 6 Angler erfolgreich nach Hause gehen.