

6 Stetige Zufallsvariablen

zugehörige Seiten in Fahrmeir et al. (2007): Kap. 6.1 - 6.2

Aufgabe 28

Sei X eine beliebige stetige Zufallsvariable mit Dichte $f(x)$ und Verteilungsfunktion $F(x)$. Überprüfen Sie die folgenden Aussagen auf ihren Wahrheitsgehalt und begründen Sie Ihre Entscheidungen.

- (a) $f(x) \leq 1$ für alle x .
- (b) $F(x) \leq 1$ für alle x .
- (c) $\int_x^\infty f(t)dt = 1 - F(x)$.
- (d) Ist $x_i < x_j$, so gilt $F(x_i) \leq F(x_j)$.

Aufgabe 29

Eine stetige Zufallsvariable X habe die Dichte

$$f(x) = \begin{cases} 1 - |x|, & -1 \leq x \leq 1, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

- (a) Überprüfen Sie, ob die Funktion $f(x)$ die geforderten Dichteeigenschaften besitzt.
- (b) Berechnen Sie die Verteilungsfunktion $F(x)$ und skizzieren Sie deren Verlauf.
- (c) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit $P(|X| \leq 0.5)$.

Aufgabe 30* (8 Punkte)

Ein System funktioniert für eine zufällige Zeitdauer X (in Monaten gemessen). Als Dichtefunktion von X soll folgende Funktion dienen:

$$f(x) = \begin{cases} Cxe^{-\frac{x}{2}}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0. \end{cases}$$

- (a) Für welches C ist obige Funktion eine Dichtefunktion?
- (b) Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass das System mindestens 5 Monate lang funktioniert?

Aufgabe 31

Das statistische Bundesamt hält für die Wachstumsrate X des Bruttozialproduktes alle Werte im Intervall $2 \leq X \leq 3$ für prinzipiell möglich und unterstellt für ihre Analyse folgende Funktion

$$f(x) = \begin{cases} c(x-2), & 2 \leq x \leq 3, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

- (a) Bestimmen Sie c derart, dass obige Funktion eine Dichtefunktion ist.
- (b) Bestimmen Sie die Verteilungsfunktion der Zufallsvariable X .
- (c) Berechnen Sie $P(X > 2.1)$ und $P(2.1 < X < 2.8)$.
- (d) Berechnen Sie $P(-4 \leq X \leq 3 | X \leq 2.1)$, und zeigen Sie, dass die Ereignisse $\{-4 \leq X \leq 3\}$ und $\{X \leq 2.1\}$ stochastisch unabhängig sind.
- (e) Bestimmen Sie den Erwartungswert, den Modus, den Median und die Varianz von X . Was lässt sich über den Verteilungstyp von X aussagen?

Aufgabe 32

Sei X eine stetige Zufallsvariable. Die zugehörige Dichte $f(x)$ sei symmetrisch um $x = a$. Zeigen Sie, dass $E(X) = a$ gilt, falls $E(X)$ existiert.

Aufgabe 33* (8 Punkte)

Von einer stetigen Zufallsvariable X , die von einem Parameter $\theta \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ abhängt, sei die Verteilungsfunktion gegeben:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < -2, \\ \frac{1}{4}(x+2) + \frac{1}{8}\theta(x^2-4), & -2 \leq x \leq 2, \\ 1, & x > 2. \end{cases}$$

- (a) Welche Gestalt hat die Dichte $f(x)$ von X ?
- (b) Welche spezielle Verteilung liegt für $\theta = 0$ vor?
- (c) Berechnen Sie den Erwartungswert von X in Abhängigkeit von θ .