zugehörige Seiten in Fahrmeir et al. (2007): Kap. 6

Aufgabe 34

An einer Bahnstation fahren S-Bahnen in Richtung A alle 15 Minuten, beginnend um 7.00 Uhr, und S-Bahnen in Richtung B alle 20 Minuten, beginnend um 7.07 Uhr. Wenn ein Fahrgast zufällig zu einer gleichverteilten Zeit zwischen 7.00 Uhr und 8.00 Uhr den Bahnsteig erreicht und in die nächste S-Bahn einsteigt, wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass er eine S-Bahn in Richtung A nimmt?

Aufgabe 35

Seien $U_1, \ldots, U_n$ unabhängige und identisch verteilte Zufallsvariablen, die gleichverteilt auf dem Intervall $[a, b]$ sind.

(a) Bestimmen Sie die Verteilungsfunktion von $Z_n := \max\{U_1, \ldots, U_n\}$.

(b) Wie groß muss n gewählt werden, damit $P(Z_n > a + 0.9 \cdot (b - a))$ größer als 99 Prozent ist?

Aufgabe 36

(a) Zeigen Sie, dass eine exponentialverteilte Zufallsvariable X „gedächtnislos“ ist, d.h. dass für alle positiven Zahlen s und t gilt

$$P(X > s + t | X > s) = P(X > t).$$

(b) Seien $X_1, \ldots, X_n$ unabhängige und identisch verteilte Zufallsvariablen, die einer Exponentialverteilung mit Parameter λ folgen. Zeigen Sie: $m_n = \min\{X_1, \ldots, X_n\}$ ist exponentialverteilt mit dem Parameter $n\lambda$.

Aufgabe 37

Die Ausfallrate einer bestimmten Sorte elektrischer Bauteile sei konstant und die mittlere Lebensdauer betrage 500 Stunden.

(a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Bauteil vor dem Zeitpunkt $t_0 = 100$ nicht ausfällt?

(b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Bauteil zwischen den Zeitpunkten $t_1 = 200$ und $t_3 = 300$ ausfällt?

(c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Bauteil vor dem Zeitpunkt t_1 ausfällt? Wie groß ist diese Wahrscheinlichkeit, wenn man weiß, dass es zum Zeitpunkt t_0 noch intakt war?

(d) Welchen Zeitpunkt überlebt ein Bauteil mit genau 90% Sicherheit; welche Zeitpunkte überlebt es mit mindestens 90% Sicherheit?

(e) Für welche Verteilung aus derselben Verteilungsfamilie ergibt sich eine Lebensdauerverteilung, bei der mit Wahrscheinlichkeit 0.9 die Lebensdauer eines Bauteils mindestens 50 Stunden beträgt?

Aufgabe 38

An einem Fluss wird täglich der Quecksilbergehalt des Wassers gemessen, der annähernd normalverteilt ist mit $\mu = 25$ ppm und $\sigma^2 = 25$ ppm^2 (ppm = parts per million).

(a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass an einem Tag

  (i) mehr als 32.5 ppm
  (ii) höchstens 25 ppm
  (iii) zwischen 22.5 und 30 ppm

  gemessen werden?

(b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Quecksilbergehalt in das dreifache zentrale Schwankungsintervall fällt?

(c) Geben Sie ein um den Erwartungswert symmetrisches Intervall an, in dem mit einer Wahrscheinlichkeit von 0.95 der Quecksilbergehalt des Wassers liegt.

(d) Um die Bevölkerung zu beruhigen, will die zuständige Behörde einen kritischen Wert c definieren, derart, dass dieser Wert nur an 2% der Tage überschritten wird. Die Behörde erklärt, dass der Zustand des Wassers unbedenklich ist, solange dieser kritische Wert nicht überschritten wird. Wie groß muss c gewählt werden?

Aufgabe 39

Sei X eine stetige Zufallsvariable mit Dichtefunktion f_X. Bestimmen Sie Dichte- und Verteilungsfunktion von $Y := X^2$.