Department für Statistik, LMU München
Prof. Gerhard Tutz, Andreas Groll

Statistik I/II für Statistiker, Mathematiker und Informatiker
WS 08/09

Formelsammlung zur Vorlesung Statistik I/II für Statistiker, Mathematiker und Informatiker (WS 08/09)

Diese Formelsammlung darf in der Klausur verwendet werden. Eigene Notizen und Ergänzungen dürfen eingefügt, aber keine zusätzlichen Blätter eingeheftet werden.

Inhaltsverzeichnis

1 Eindimensionale Merkmale

1.1 Häufigkeiten und Häufigkeitsverteilungen

Bezeichnungen:

- Urliste: $x_1, \dots, x_n$
- geordnete Urliste: $x_{(1)} \leq \dots \leq x_{(n)}$
- (kodierte) Merkmalsausprägungen: $a_1 < \dots < a_k$
- absolute Häufigkeit der Ausprägung a_j:

$$h_j = h(a_j) = \sum_{i=1}^n 1_{\{x_i = a_j\}}, \quad \text{mit } 1_{\{x_i=a_j\}} = \begin{cases} 1, & \text{falls } x_i = a_j, \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases}$$

- relative Häufigkeit der Ausprägung a_j: $f_j = f(a_j) = h_j/n$,

Häufigkeitsfunktion (-verteilung):

$$\text{absolut:} \qquad h(x) = \begin{cases} h_j, & x = a_j, \quad j = 1,\dots,k \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\text{relativ:} \qquad f(x) = \begin{cases} f_j, & x = a_j, \quad j = 1,\dots,k \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Empirische Verteilungsfunktion (kumulierte relative Häufigkeitsverteilung):

$$F(x) = \sum_{a_j \leq x} f(a_j)$$

Klassenbildung (Gruppierung):

- k Klassen der Form $[c_0, c_1), [c_1, c_2), \ldots, [c_{k-1}, c_k)$
- Klassenbreite: $d_j = c_j - c_{j-1} \qquad j = 1, \ldots, k$
- Klassenmitte: $m_j = (c_j + c_{j-1})/2$
- absolute Häufigkeit der Klasse j: $h_j = \sum\limits_{a_i \in (c_{j-1}, c_j]} h(a_i)$
- relative Häufigkeit der Klasse j: $f_j = h_j/n$

Histogramm (flächentreue Häufigkeitsverteilung):

$$\text{„Blockhöhe (abzutragende Höhe)“} = \widetilde{f}(x) = \begin{cases} f_j/d_j & x \in [c_{j-1}, c_j) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \qquad \text{für} \quad j = 1, \ldots, k.$$

1.2 Lageparameter

Modus:

x_{mod}: Ausprägung mit der größten Häufigkeit

- nichtklassierte Daten: $x_{mod} = \{a_j | \, h_j = \max_{a_i} h_i\}$
- klassierte Daten:

$$x_{mod} = c_{j-1} + \frac{\widetilde{f}_j - \widetilde{f}_{j-1}}{2\widetilde{f}_j - \widetilde{f}_{j-1} - \widetilde{f}_{j+1}}(c_j - c_{j-1}), \quad \widetilde{f}_j := \widetilde{f}(x), \quad x \in [c_{j-1}, c_j]$$

mit j : Modalklasse

Median:

- nichtklassierte Daten:

$$x_{med} = \begin{cases} x_{\left(\frac{n+1}{2}\right)} & n \text{ ungerade} \\ \frac{1}{2}\left(x_{\left(\frac{n}{2}+1\right)} + x_{\left(\frac{n}{2}\right)}\right) & n \text{ gerade} \end{cases}$$

- klassierte Daten:

$$x_{med} = c_{j-1} + \frac{0.5 - F(c_{j-1})}{F(c_j) - F(c_{j-1})}(c_j - c_{j-1}), \quad \text{mit Medianklasse } j$$

Arithmetisches Mittel (Durchschnittswert):

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

Harmonisches Mittel:

$$\bar{x}_H = \frac{\sum_{i=1}^n g_i}{\sum_{i=1}^n \frac{g_i}{x_i}}, \quad g_i : \text{Gewicht der } i\text{-ten Beobachtung}$$

Geometrisches Mittel:

$$x_G = \sqrt[n]{x_1 \cdot \ldots \cdot x_n}$$

mittleres Entwicklungstempo:

$$i_G = \sqrt[n]{i_1 \cdot \ldots \cdot i_n}, \quad i_t = \frac{x_t}{x_{t-1}}, \; t = 1, \ldots, n$$

Gewichtetes arithmetisches Mittel:

$$\bar{x}_w = \sum_{i=1}^n w_i x_i \quad \text{wobei} \quad \sum_{i=1}^n w_i = 1 \quad \text{und} \quad 0 \le w_i \le 1 \quad \text{für alle } i$$

Spezialfall: arithmetisches Mittel für $w_i = 1/n$.

Arithmetisches Mittel bei Schichtenbildung:

$$\bar{x} = \frac{1}{n}(n_1\bar{x}_1 + \ldots + n_r\bar{x}_r) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^r n_j\bar{x}_j$$

1.3 Quantile

Jeder Wert x_p, mit $0 < p < 1$, für den mindestens ein Anteil p der Daten $\le x_p$ und mindestens ein Anteil $1-p$ der Daten $\ge x_p$ ist, heißt *p-Quantil:*

$$\frac{\text{Anzahl}\,(x\text{-Werte} \le x_p)}{n} \ge p \quad \text{und} \quad \frac{\text{Anzahl}\,(x\text{-Werte} \ge x_p)}{n} \ge 1 - p.$$

Äquivalent dazu ist: x_p ist der kleinste x-Wert, für den $F(x) \ge p$ gilt, d.h.

$$F(x) < p \text{ für } x < x_p \quad \text{und} \quad F(x_p) \ge p.$$

Damit gilt für das *p-Quantil*

- bei nichtklassierten Daten:

$$\begin{aligned} x_p &= x_{([np]+1)} && \text{wenn } np \text{ nicht ganzzahlig,} \\ x_p &\in [x_{(np)}, x_{(np+1)}] && \text{wenn } np \text{ ganzzahlig.} \end{aligned}$$

- bei klassierten Daten:

$$x_p = c_{j-1} + \frac{p - F(c_{j-1})}{F(c_j) - F(c_{j-1})}(c_j - c_{j-1}), \quad p \in (0,1), \quad \text{mit } j \text{ Quantilklasse}$$

Speziell: $x_{0.5}$ = Median, $x_{0.25}$ = unteres Quartil, $x_{0.75}$ = oberes Quartil

1.4 Streuungsparameter

Spannweite:

$$SP = x_{(n)} - x_{(1)} = x_{max} - x_{min}$$

Quantilsabstand:

$$x_{1-p} - x_p$$

Interquartilsabstand:

$$d_Q = x_{0.75} - x_{0.25}$$

Empirische Varianz (mittlere quadratische Abweichung):

Urliste: $$\tilde{s}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 = \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) - \bar{x}^2$$

Häufigkeitsdaten: $$\tilde{s}^2 = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{k}(a_j - \bar{x})^2 h(a_j) \quad \text{bzw.} \quad \tilde{s}^2 = \sum_{j=1}^{k}(a_j - \bar{x})^2 f(a_j)$$

Empirische Standardabweichung:

$$\tilde{s} = +\sqrt{\tilde{s}^2}$$

Stichprobenvarianz:

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$$

Variationskoeffizient:

$$v = \frac{\tilde{s}}{\bar{x}} \quad (\bar{x} > 0)$$

Streuungszerlegung:

Für r disjunkte statistische Massen $E_1, \ldots, E_r$, deren jeweilige arithmetische Mittel bzw. mittlere quadratische Abweichungen mit $\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_r$ bzw. $\tilde{s}_1^2, \ldots, \tilde{s}_r^2$ bezeichnet sind, berechnet sich die mittlere quadratische Abweichung für die Gesamtmasse folgendermaßen:

$$\tilde{s}^2_{Ges} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{r} n_j \tilde{s}_j^2 + \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{r} n_j(\bar{x}_j - \bar{x}_{Ges})^2$$

wobei $n_j = |E_j|$ und $\bar{x}_{Ges} = \frac{1}{n}\sum\limits_{j=1}^{r} n_j \bar{x}_j$.

2 Zweidimensionale Merkmale

2.1 Gemeinsame Häufigkeiten, Randhäufigkeiten, bedingte Häufigkeiten

Bezeichnungen:

- Urliste: $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$
- Merkmalsausprägungen: $a_1, a_2, \ldots, a_k$ für X bzw. $b_1, b_2, \ldots, b_m$ für Y

Gemeinsame Häufigkeiten:

$$h_{ij} = h(a_i, b_j) = \sum\nolimits_{\ell=1}^{n} 1_{\{x_\ell = a_i\}} 1_{\{y_\ell = b_j\}} \quad \text{absolute Häufigkeiten}$$

$$f_{ij} = f(a_i, b_j) = \frac{h_{ij}}{n} \quad \text{relative Häufigkeiten}$$

Randhäufigkeiten:

$$h_{i\bullet} = \sum_{j=1}^{m} h_{ij}, \qquad h_{\bullet j} = \sum_{i=1}^{k} h_{ij} \qquad \text{(absolut)}$$

$$f_{i\bullet} = \frac{h_{i\bullet}}{n} = f_X(a_i), \quad f_{\bullet j} = \frac{h_{\bullet j}}{n} = f_Y(b_j) \qquad \text{(relativ)}$$

Bedingte relative Häufigkeiten:

$$f_X(a_i|b_j) = \frac{f(a_i, b_j)}{f_Y(b_j)} = \frac{h_{ij}}{h_{\bullet j}}, \quad f_Y(b_j|a_i) = \frac{f(a_i, b_j)}{f_X(a_i)} = \frac{h_{ij}}{h_{i\bullet}}$$

2.2 Assoziation bei nominalen Merkmalen

χ^2-Koeffizient:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{m} \frac{(h_{ij} - \tilde{h}_{ij})^2}{\tilde{h}_{ij}} = n\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{m} \frac{(f_{ij} - \tilde{f}_{ij})^2}{\tilde{f}_{ij}}$$

wobei $\tilde{h}_{ij} = \dfrac{h_{i\bullet} h_{\bullet j}}{n}$, $\tilde{f}_{ij} = f_{i\bullet} f_{\bullet j}$.

Kontingenzkoeffizient:

$$K = \sqrt{\frac{\chi^2}{\chi^2 + n}}$$

korrigierter Kontingenzkoeffizient:

$$K^* = \frac{K}{K_{max}}$$

mit: $K_{max} = \sqrt{\frac{M-1}{M}}$, wobei $M = \min\{k; m\}$.

Chance (odds) bzw. Risiko:

$$\gamma(j_1, j_2|i) = \gamma_{Y|X}(b_{j_1}, b_{j_2}|a_i) = \frac{h_{ij_1}}{h_{ij_2}}$$

Relative Chance (odds ratio):

$$\gamma(j_1, j_2|i_1, i_2) = \gamma_{Y|X}(b_{j_1}, b_{j_2}|a_{i_1}, a_{i_2}) = \frac{\frac{h_{i_1j_1}}{h_{i_1j_2}}}{\frac{h_{i_2j_1}}{h_{i_2j_2}}} = \frac{h_{i_1j_1}h_{i_2j_2}}{h_{i_1j_2}h_{i_2j_1}}$$

Spezialfall: Vierfeldertafel

χ^2-Koeffizient:

a	b	a+b
c	d	c+d
a+c	b+d	n

$$\chi^2 = \frac{n(ad - bc)^2}{(a+b)(a+c)(b+d)(c+d)}$$

Kreuzproduktverhältnis (Odds-Ratio, relative Chance):

h_{11}	h_{12}
h_{21}	h_{22}

$$\gamma = \frac{h_{11}/h_{12}}{h_{21}/h_{22}} = \frac{h_{11}h_{22}}{h_{12}h_{21}}.$$

2.3 Korrelationsrechnung für metrische und ordinale Merkmale

Bravais-Pearson-Korrelationskoeffizient

$$r = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 \sum\limits_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2}} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i - n\bar{x}\bar{y}}{\sqrt{\left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 - n\bar{x}^2\right)\left(\sum\limits_{i=1}^{n} y_i^2 - n\bar{y}^2\right)}}$$

Rangkorrelationskoeffizient von Spearman

$$r_{SP} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n}(rg(x_i) - \bar{rg}_X)(rg(y_i) - \bar{rg}_Y)}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}(rg(x_i) - \bar{rg}_X)^2 \sum\limits_{i=1}^{n}(rg(y_i) - \bar{rg}_Y)^2}}$$

Alternative Darstellungsform (bei Abwesenheit von Bindungen)

$$r_{SP} = 1 - \frac{6\sum_{i=1}^{n} d_i^2}{n(n^2-1)}$$

mit $d_i = rg(x_i) - rg(y_i)$

korrigierter Rangkorrelationskoeffizient (bei Vorliegen von Bindungen)

$$r_{SP}^* = \frac{n(n^2-1) - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k} s_i(s_i^2-1) - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{m} r_j(r_j^2-1) - 6\sum_{i=1}^{n} d_i^2}{\sqrt{n(n^2-1) - \sum_{i=1}^{k} s_i(s_i^2-1)}\sqrt{n(n^2-1) - \sum_{j=1}^{\ell} r_j(r_j^2-1)}}$$

mit $s_i = \sum_{\ell=1}^{n} 1_{\{x_\ell = a_i\}}, \quad i = 1, \ldots, k$, und $r_j = \sum_{\ell=1}^{n} 1_{\{x_\ell = b_j\}}, \quad j = 1, \ldots, m$

Kendall's τ ohne Bindungen

- Sei (x_i, y_i) das Beobachtungstupel des i-ten Merkmalsträgers. Wir betrachten nun ein Paar von Beobachtungstupeln (x_i, y_i) und (x_j, y_j). Sei o.B.d.A. $x_i < x_j$. Das Paar heißt **konkordant**, wenn auch $y_i < y_j$. Das Paar heißt **diskordant**, wenn $y_i > y_j$.
  Insgesamt gibt es $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$ Paare, die man überprüfen muss. Dabei gelten die folgenden Bezeichnungen:
- N_c = Anzahl der konkordanten Paare
- N_d = Anzahl der diskordanten Paare

$$\tau = \frac{N_c - N_d}{\frac{1}{2}(n(n-1))}$$

Kendall's τ mit Bindungen

- Ist ein Paar weder konkordant noch diskordant, ist es ein **Tie** bzw. eine **Bindung**, d.h. entweder gilt $x_i = x_j$ oder $y_i = y_j$ oder beides:
- N_c und N_d wie im Fall ohne Bindungen
- T_x = Anzahl der Paare mit $x_i = x_j$ aber $y_i \neq y_j$ (x-Ties)
- T_y = Anzahl der Paare mit $y_i = y_j$ aber $x_i \neq x_j$ (y-Ties)
- T_{xy} = Anzahl der Paare mit $x_i = x_j$ und zugleich $y_i = y_j$ (spielen keine Rolle für die Berechnung)
- Da für jedes zu überprüfende Paar nur einer der oberen fünf Fälle in Frage kommt, gilt also: $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2} = N_c + N_d + T_x + T_y + T_{xy}$

$$\tau = \frac{N_c - N_d}{\sqrt{(N_c + N_d + T_x)(N_c + N_d + T_y)}}$$

3 Konzentrationsmaße

3.1 Lorenzkurve und Gini-Koeffizient

Lorenzkurve:

Für die geordnete Urliste $x_{(1)} \leq \ldots \leq x_{(n)}$ ergibt sich die *Lorenzkurve* als Streckenzug durch die Punkte

$$(0,0), (u_1, v_1), \ldots, (u_n, v_n) = (1,1)$$

mit

$$u_j = j/n \qquad \text{und} \qquad v_j = \frac{\sum_{i=1}^{j} x_{(i)}}{\sum_{i=1}^{n} x_{(i)}}.$$

Bei Häufigkeitsdaten mit den Klassenmitten $a_1, \ldots, a_k$:

$$\tilde{u}_j = \sum_{i=1}^{j} h_i/n = \sum_{i=1}^{j} f_i \qquad \text{und} \qquad \tilde{v}_j = \frac{\sum_{i=1}^{j} f_i a_i}{\sum_{i=1}^{k} f_i a_i} = \frac{\sum_{i=1}^{j} h_i a_i}{n\bar{x}} \qquad j = 1, \ldots, k\,.$$

Gini-Koeffizient:

$$\begin{aligned} G &= \frac{\text{Fläche zwischen Diagonale und Lorenzkurve}}{\text{Fläche zwischen Diagonale und } u\text{-Achse}} \\ &= 2 \cdot \text{Fläche zwischen Diagonale und Lorenzkurve} \end{aligned}$$

Geordnete Urliste:

$$G = \frac{2\sum_{i=1}^{n} i x_{(i)}}{n \sum_{i=1}^{n} x_{(i)}} - \frac{n+1}{n}.$$

Häufigkeitsdaten mit den Klassenmitten $a_1 < \ldots < a_k$:

$$G = 1 - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{k} h_j (\tilde{v}_{j-1} + \tilde{v}_j)$$

bzw.

$$G = \frac{\sum_{i=1}^{k} (\tilde{u}_{i-1} + \tilde{u}_i) h_i a_i}{\sum_{i=1}^{k} h_i a_i} - 1\,, \quad \text{wobei} \quad \tilde{u}_i = \sum_{j=1}^{i} h_j/n, \quad \tilde{v}_i = \sum_{j=1}^{i} f_j a_j / \sum_{j=1}^{k} f_j a_j.$$

Normierter Gini-Koeffizient (Lorenz-Münzner-Koeffizient):

$$G^* = \frac{n}{n-1} G, \quad G^* \in [0;1]$$

3.2 Konzentrationsrate CR_g

Konzentrationsrate CR_g:

Für vorgegebenes g und $x_1 \leq \ldots \leq x_n$ bildet man

$$CR_g = \sum_{i=n-g+1}^{n} p_i\,, \quad \text{wobei} \quad p_i = \frac{x_i}{\sum_{j=1}^{n} x_j}$$

den Merkmalsanteil der i-ten Einheit bezeichnet.

3.3 Herfindahl-Index

Herfindahl-Index:

$$H = \sum_{i=1}^{n} p_i^2\,, \quad \text{wobei} \quad p_i = \frac{x_i}{\sum\limits_{j=1}^{n} x_j}.$$

4 Elementare Wahrscheinlichkeitsrechnung

4.1 Rechenregeln für Wahrscheinlichkeiten

Axiome von Kolmogorow:

- $P(A) \geq 0$ für jedes Ereignis A
- $P(\Omega) = 1$
- $P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + \ldots$
  für endlich oder abzählbar unendlich viele paarweise disjunkte Ereignisse, d.h. Ereignisse mit $A_i \cap A_j = \emptyset$ für alle $i \neq j$

Folgerungen:

- $P(A) \leq 1$
- $P(\emptyset) = 0$
- Aus $A \subset B$ folgt $P(A) \leq P(B)$
- $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

Allgemeiner Additionssatz für $n = 2$:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Allgemeiner Additionssatz für $n = 3$:

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

Allgemeiner Additionssatz (Ein- und Ausschlußformel für abhängige Ereignisse):

$$\begin{aligned} P(E_1 \cup E_2 \cup \ldots \cup E_n) &= \sum_{i=1}^{n} P(E_i) - \sum_{i_1 < i_2} P(E_{i_1} \cap E_{i_2}) + \ldots \\ &+ (-1)^{r+1} \sum_{i_1 < i_2 < \ldots < i_r} P(E_{i_1} \cap E_{i_2} \cap \ldots \cap E_{i_r}) + \ldots \\ &+ (-1)^{n+1} P(E_1 \cap E_2 \cap \ldots \cap E_n) \end{aligned}$$

(Die Summation $\sum_{i_1 < i_2 < \ldots < i_r} P(E_{i_1} \cap E_{i_2} \cap \ldots \cap E_{i_r})$ läuft über alle $\binom{n}{r}$ möglichen Teilmengen von $\{1, 2, \ldots, n\}$.)

4.2 Kombinatorik

Anzahl möglicher Stichproben vom Umfang N aus Grundgesamtheit vom Umfang N:

- Permutation ohne Wiederholung: $P(N) = N!$.
- Permutation mit Wiederholung:

  $$P^W(N|g_1, \ldots, g_r) = \frac{N!}{g_1! \cdot \ldots \cdot g_r!}$$

  mit r Gruppen mit jeweils gleichen Elementen. Es muss gelten $g_1 + \ldots + g_r = N$.

Anzahl möglicher Stichproben vom Umfang n aus Grundgesamtheit vom Umfang N:

- Kombination ohne Wiederholung: Modell ohne Zurücklegen ohne Berücksichtigung der Reihenfolge $K(N, n) = \binom{N}{n}$.
- Kombination mit Wiederholung: Modell mit Zurücklegen ohne Berücksichtigung der Reihenfolge $K^W(N, n) = \binom{N+n-1}{n}$.
- Variation ohne Wiederholung: Modell ohne Zurücklegen mit Berücksichtigung der Reihenfolge $V(N, n) = \frac{N!}{(N-n)!}$.
- Variation mit Wiederholung: Modell mit Zurücklegen mit Berücksichtigung der Reihenfolge $V^W(N, n) = N^n$.

4.3 Bedingte Wahrscheinlichkeiten

Definition:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \quad \text{falls} \quad P(B) > 0$$

Folgerungen:

- $P(A \cap B) = P(A|B)P(B), \quad \text{falls} \quad P(B) > 0$
- $P(B \cap A) = P(B|A)P(A), \quad \text{falls} \quad P(A) > 0$
- $P(A_1 \cap \ldots \cap A_m) = P(A_1)P(A_2|A_1) \cdot \ldots \cdot P(A_m|A_1 \cap \ldots \cap A_{m-1})$, falls $P(A_1 \cap \ldots \cap A_{m-1}) > 0$.

4.4 Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit

Sei $A_1, \ldots, A_k$ eine disjunkte Zerlegung von Ω, dann gilt für jedes Ereignis $B \subset \Omega$

$$P(B) = \sum_{i=1}^{k} P(B|A_i)P(A_i).$$

4.5 Formel von Bayes

Sei $A_1, \ldots, A_k$ eine disjunkte Zerlegung von Ω, wobei für mindestens ein $i,\ i = 1, \ldots, k$, $P(A_i) > 0$ und $P(B|A_i) > 0$ erfüllt ist, dann gilt

$$P(A_j|B) = \frac{P(B|A_j)P(A_j)}{\sum_{i=1}^{k} P(B|A_i)P(A_i)} = \frac{P(B|A_j)P(A_j)}{P(B)} \quad \text{für jedes } j = 1, \ldots, k.$$

4.6 Unabhängigkeit zweier Ereignisse

Zwei Ereignisse A und B heißen (stochastisch) unabhängig, wenn gilt

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

bzw. $P(A|B) = P(A)$, falls $P(B) > 0$ bzw. $P(B|A) = P(B)$, falls $P(A) > 0$.

5 Eindimensionale Zufallsvariablen und ihre Verteilungen

5.1 Definition von diskreten und stetigen Zufallsvariablen und Dichten

Diskrete Zufallsvariable:

Eine ZV X heißt *diskret*, falls der Wertebereich von X nur endlich oder abzählbar unendlich viele Werte $x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots$ annehmen kann.

Wahrscheinlichkeitsfunktion (Dichte):

$$f(x) = \begin{cases} P(X = x_i) = p_i & \text{für} \quad x = x_i \in \{x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots\} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Stetige Zufallsvariable:

Eine ZV X heißt *stetig*, wenn es eine Funktion $f(x) \geq 0$ gibt, so dass für jedes Intervall $[a, b]$ gilt:

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx$$

- Die Funktion $f(x)$ heißt **Dichte** von X
- Es gilt: $P(X = x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

5.2 Die Verteilungsfunktion einer Zufallsvariablen

Verteilungsfunktion einer Zufallsvariablen:

$$F(x) = P(X \leq x), \quad x \in \mathbb{R}$$

Rechenregeln:

- $P(X = x) = F(x) - P(X < x)$
- $P(X > x) = 1 - F(x)$
- $P(a < X \leq b) = F(b) - F(a), \quad \text{falls } a < b$
- $P(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a) + P(X = a)$
  speziell: $P(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a)$ für stetige Verteilungen
- $P(a < X < b) = F(b) - F(a) - P(X = b)$
- $P(a \leq X < b) = F(b) - F(a) + P(X = a) - P(X = b)$

5.3 Zusammenhänge zwischen Dichten und Verteilungsfunktionen

Im diskreten Fall:

$$\begin{aligned} F(x) &= \sum_{x_i \le x} f(x_i) = \sum_{x_i \le x} P(X = x_i) \\ P(a \le X \le b) &= \sum_{a \le x_i \le b} f(x_i) = \sum_{a \le x_i \le b} P(X = x_i) \\ f(x_i) = P(X = x_i) &= F(x_i) - F(x_{i-1}) \end{aligned}$$

Im stetigen Fall:

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_{-\infty}^{x} f(t)dt \\ P(a \le X \le b) &= \int_{a}^{b} f(t)dt \end{aligned}$$

$$f(x) = F'(x) = \frac{dF(x)}{dx}, \quad \text{falls } F(x) \text{ an der Stelle } x \text{ differenzierbar ist.}$$

5.4 Modus, Median und Quantile

Modus:

x_{mod}: Jeder Wert x, an dem $f(x)$ maximal ist.

Quantile:

- Jeder Wert x_p mit $0 < p < 1$, für den

  $$P(X \ge x_p) \ge 1 - p \quad \text{und} \quad P(X \le x_p) \ge p$$

  gilt, heißt *p-Quantil* einer diskreten Verteilung.

- Jeder Wert x_p mit $F(x_p) = p$ heißt *p-Quantil* einer stetigen Verteilung.

Median:

Jedes 50%-Quantil heißt Median ($p = 0.5$).

5.5 Erwartungswert, Varianz und Standardabweichung

Erwartungswert:

$$\mu = \mathrm{E}(X) = \begin{cases} \sum_{x} x f(x), & \text{falls } X \text{ diskret} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx, & \text{falls } X \text{ stetig} \end{cases}$$

Varianz:

$$\sigma^2 = \mathrm{Var}(X) = \begin{cases} \sum_{x} (x - \mathrm{E}(X))^2 f(x), & \text{falls } X \text{ diskret} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mathrm{E}(X))^2 f(x) dx, & \text{falls } X \text{ stetig} \end{cases}$$

Standardabweichung:

$$\sigma = +\sqrt{\sigma^2} = +\sqrt{\mathrm{Var}(X)}$$

5.6 Rechenregeln und Eigenschaften von Erwartungswerten

Transformation:

- Die Zufallsvariable $Y = g(X)$ besitzt den Erwartungswert

  $$\mathrm{E}(Y) = \begin{cases} \sum_{x} g(x) f(x), & \text{falls } X \text{ diskret} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f(x) dx, & \text{falls } X \text{ stetig} \end{cases}$$

- Spezialfall: lineare Transformation

  $$\begin{aligned} \mathrm{E}(aX + b) &= a\mathrm{E}(X) + b \quad \text{für alle} \quad a, b \in \mathbb{R} \\ \mathrm{Var}(aX + b) &= a^2 \mathrm{Var}(X) \end{aligned}$$

Verschiebungssatz:

$$\mathrm{Var}(X) = \mathrm{E}(X^2) - [\mathrm{E}(X)]^2$$

5.7 Spezielle diskrete Verteilungen

Verteilung	Wahrscheinlichkeitsfunktion	E(X)	Var(X)
$X \sim Ber(\pi)$ Bernoulliverteilung	$f(x) = \begin{cases} \pi & \text{für } x = 1, \\ 1-\pi & \text{für } x = 0, \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$	π	$\pi(1-\pi)$
$X \sim G(\pi)$ Geometrische Verteilung	$f(x) = (1-\pi)^{x-1}\pi \quad \text{für} \quad x = 1, 2, \ldots$	$\frac{1}{\pi}$	$\frac{1-\pi}{\pi^2}$
$X \sim B(n, \pi)$ Binomialverteilung	$f(x) = \begin{cases} \binom{n}{x}\pi^x(1-\pi)^{n-x} & \text{für } x = 0, 1, \ldots, n \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$	$n\,\pi$	$n\,\pi(1-\pi)$
$X \sim NB(r, \pi)$ negative Binomialverteilung	$f(x) = \begin{cases} \binom{x-1}{r-1}\pi^r(1-\pi)^{x-r} & \text{für } x = r, r+1, \ldots \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$	$\frac{r}{\pi}$	$\frac{r(1-\pi)}{\pi^2}$
$X \sim H(n, M, N)$ Hypergeometrische Verteilung	$f(x) = \frac{\binom{M}{x}\binom{N-M}{n-x}}{\binom{N}{n}} \quad \text{für} \quad x \in \tau$	$n\frac{M}{N}$	s.u.
$X \sim Po(\lambda)$ Poissonverteilung	$f(x) = \begin{cases} \frac{\lambda^x}{x!}e^{-\lambda} & \text{für } x = 0, 1, 2, \ldots \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \quad (\lambda > 0)$	λ	λ

Varianz der hypergeometrischen Verteilung: $Var(X) = n\frac{M}{N}\left(1 - \frac{M}{N}\right)\frac{N-n}{N-1}$

5.8 Spezielle stetige Verteilungen

Stetige Gleichverteilung: $X \sim U[a; b]$

Dichte und Verteilungsfunktion:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & \text{für} \quad a \le x \le b, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases} \qquad F(x) = \begin{cases} 0, & x < a, \\ \frac{x-a}{b-a}, & a \le x \le b, \\ 1, & x > b. \end{cases}$$

Erwartungswert und Varianz:

$$E(X) = \frac{a+b}{2}, \quad Var(X) = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

Exponentialverteilung: $X \sim Exp(\lambda)$

Dichte und Verteilungsfunktion:

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{für} \quad x \ge 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} . \quad F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x}, & x \ge 0, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases} \quad (\lambda > 0)$$

Erwartungswert und Varianz:

$$E(X) = \frac{1}{\lambda}, \quad Var(X) = \frac{1}{\lambda^2}.$$

Normalverteilung: $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

Dichte:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left(\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) \quad \text{für} \quad x \in \mathbb{R}$$

Erwartungswert und Varianz:

$$E(X) = \mu, \quad Var(X) = \sigma^2.$$

Weibullverteilung: $X \sim W(\lambda, \alpha)$

Dichte und Verteilungsfunktion:

$$f(x) = \begin{cases} \lambda\alpha(\lambda x)^{\alpha-1}\exp(-(\lambda x)^\alpha), & \text{für} \quad x \ge 0, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases} \qquad F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-(\lambda x)^\alpha}, & x \ge 0, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases} \quad (\lambda, \alpha > 0)$$

Erwartungswert und Varianz:

$$E(X) = \frac{1}{\lambda}\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{\alpha}\right), \quad Var(X) = \frac{1}{\lambda^2}\left(\Gamma\left(\frac{\alpha+2}{\alpha}\right) - \left[\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{\alpha}\right)\right]^2\right)$$

mit

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}dt \quad (x > 0).$$

5.9 Die Chi-Quadrat-, Student- und Fisher-Verteilung

Chi-Quadrat-(χ^2-)Verteilung:

$$Z = \sum_{i=1}^{n} X_i^2 \sim \chi_n^2 \qquad \text{d.h. } \chi^2\text{-verteilt mit } n \text{ Freiheitsgraden}$$

falls $X_1, \ldots, X_n$ unabhängige, standardnormalverteilte Zufallsvariablen sind

Student-(t-)Verteilung:

$$T = \frac{X}{\sqrt{Z/n}} \sim t_n \qquad \text{d.h. } t\text{-verteilt mit } n \text{ Freiheitsgraden}$$

falls X standardnormalverteilt, Z χ_n^2-verteilt und X und Z unabhängig sind

Fisher-(F-)Verteilung:

$$Z = \frac{X/m}{Y/n} \sim F_{m,n} \qquad \text{d.h. } F\text{-verteilt mit } m \text{ und } n \text{ Freiheitsgraden}$$

falls X χ_m^2- und Y χ_n^2-verteilt und unabhängig sind.

6 Zweidimensionale Zufallsvariablen und ihre Verteilungen

6.1 Definition zweidimensionaler Zufallsvariablen

Zweidimensionale diskrete Zufallsvariable:

Seien X und Y zwei diskrete ZV, wobei X die Werte $x_1, x_2, \ldots$ und Y die Werte $y_1, y_2, \ldots$ annehmen kann, so ist (X, Y) eine *zweidimensionale diskrete* Zufallsvariable mit Werten $(x_i, y_j),\ i = 1, 2, \ldots,\ j = 1, 2, \ldots$.

Gemeinsame Wahrscheinlichkeitsfunktion:

$$f(x,y) = \begin{cases} P(X = x, Y = y) & \text{für } (x,y) \in \{(x_1,y_1),(x_1,y_2),\ldots\} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Randverteilungen:

$$f_X(x) = P(X = x) = \sum_j f(x, y_j) \quad \text{und} \quad f_Y(y) = P(Y = y) = \sum_i f(x_i, y)$$

Zweidimensionale stetige Zufallsvariable:

Die Zufallsvariablen X und Y sind *gemeinsam stetig verteilt*, wenn es eine **zweidimensionale Dichtefunktion** $f(x,y) \geq 0$ gibt, so daß gilt

$$P(a \leq X \leq b, c \leq Y \leq d) = \int_a^b \int_c^d f(x,y)\,dy\,dx.$$

Randdichten:

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dy \quad \text{und} \quad f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dx$$

Bedingte Wahrscheinlichkeitsfunktionen/Dichten:

$$f_X(x|y) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)} \quad \text{und} \quad f_Y(y|x) = \frac{f(x,y)}{f_X(x)}$$

Gemeinsame Verteilungsfunktion:

$$F(x,y) = P(X \leq x, Y \leq y) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{x_i \leq x} \sum_{y_j \leq y} f(x_i, y_j) & \text{(diskret)} \\ \displaystyle\int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f(u,v)\,dv\,du & \text{(stetig)} \end{cases}$$

6.2 Unabhängigkeit, Kovarianz und Korrelation

Unabhängigkeit von zwei Zufallsvariablen:

Zwei Zufallsvariablen X und Y heißen unabhängig, wenn für alle x und y gilt

$$f(x,y) = f_X(x) f_Y(y)$$

Kovarianz:

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = E\{[X-E(X)][Y-E(Y)]\} = \begin{cases} \sum_i \sum_j f(x_i,y_j)(x_i-\mathrm{E}(X))(y_j-\mathrm{E}(Y)) & \text{(diskret)} \\ \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)(x-\mathrm{E}(X))(y-\mathrm{E}(Y))dxdy & \text{(stetig)} \end{cases}$$

Verschiebungssatz:

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathrm{E}(X\cdot Y) - \mathrm{E}(X)\cdot\mathrm{E}(Y)$$

$$\text{mit}\quad \mathrm{E}(X\cdot Y) = \begin{cases} \sum_i \sum_j f(x_i,y_j)x_i y_j & \text{(diskret)} \\ \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xyf(x,y)dydx & \text{(stetig)} \end{cases}$$

Lineare Transformation:

Für die Zufallsvariablen $\tilde{X} = a_X X + b_X$ und $\tilde{Y} = a_Y Y + b_Y$ gilt

$$\mathrm{Cov}(\tilde{X},\tilde{Y}) = a_X a_Y \mathrm{Cov}(X,Y)$$

Korrelationskoeffizient:

$$\rho = \rho(X,Y) = \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{\mathrm{Var}(X)}\sqrt{\mathrm{Var}(Y)}} = \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sigma_X\sigma_Y}$$

Unkorreliertheit:

Die Zufallsvariablen X und Y heißen unkorreliert, wenn gilt

$$\rho(X,Y) = 0 \quad \text{bzw.} \quad \mathrm{Cov}(X,Y) = 0$$

Varianz der Summe zweier Zufallsvariablen:

$$\mathrm{Var}(X+Y) = \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y) + 2\mathrm{Cov}(X,Y)$$

Erwartungswert und Varianz von Linearkombinationen:

Die gewichtete Summe

$$X = a_1X_1 + \ldots + a_nX_n$$

der Zufallsvariablen $X_1,\ldots,X_n$ besitzt den Erwartungswert

$$\mathrm{E}(X) = a_1\mathrm{E}(X_1) + \ldots + a_n\mathrm{E}(X_n)$$

und die Varianz

$$\mathrm{Var}(X) = \sum_{i=1}^{n} a_i^2\mathrm{Var}(X_i) + 2\sum_{i<j} a_i a_j \mathrm{Cov}(X_i,X_j)$$

7 Ergänzungen zu Zufallsvariablen

7.1 Grenzwertsätze

Das Gesetz der großen Zahlen
Sei $X_1,\ldots,X_n,\ldots$ eine Folge von Zufallsvariablen mit Erwartungswert μ und Varianz σ^2. Dann gilt für alle $c>0$:

$$\lim_{n\to\infty} P(|\bar{X}_n - \mu| \le c) = 1.$$

Man sagt: $\bar{X}_n$ konvergiert nach Wahrscheinlichkeit gegen μ.

Satz von Glivenko–Cantelli
Sei X eine Zufallsvariable mit Verteilungsfunktion $F(x)$ und $F_n(x)$ die empirische Verteilungsfunktion bei einer Stichprobe vom Umfang n. Dann gilt für jedes $c>0$:

$$\lim_{n\to\infty} P(\sup_x |F_n(x) - F(x)| \le c) = 1, \quad x \in \mathbb{R}.$$

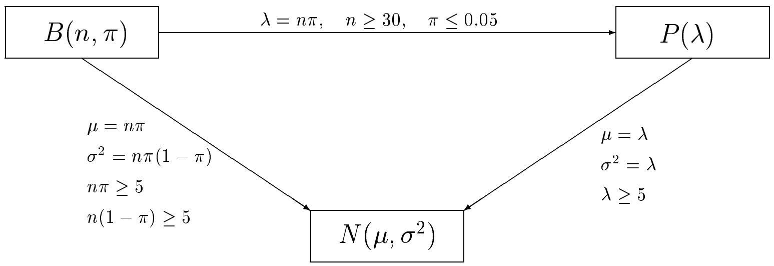
Zentraler Grenzwertsatz
Seien $X_1,\ldots,X_n$ unabhängige, identisch verteilte Zufallsvariablen mit Erwartungswert μ und Varianz $\sigma^2>0$. Dann konvergiert die Verteilungsfunktion $F_n(z)$ der standardisierten Summe

$$Z_n = \frac{X_1+\ldots+X_n-n\mu}{\sigma\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n}\frac{X_i-\mu}{\sigma}$$

für $n\to\infty$ an jeder Stelle $z\in\mathbb{R}$ gegen die Verteilungsfunktion $\Phi(z)$ der Standardnormalverteilung, d.h.

$$Z_n \overset{a}{\sim} N(0,1).$$

7.2 Approximation von Verteilungen



7.3 Ungleichung von Tschebyschew

Für eine Zufallsvariable X mit Erwartungswert μ und Varianz σ^2 gelten für jedes $c > 0$ die folgenden Ungleichungen:

$$P(|X-\mu| \geq c) \leq \frac{\sigma^2}{c^2} \quad \text{und} \quad P(|X-\mu| < c) \geq 1 - \frac{\sigma^2}{c^2}.$$

8 Testen und Schätzen

Bezeichnungen:

- Merkmal X: metrisch oder dichotom (Bernoulliverteilt)
- Unbekannter Parameter der Verteilung von X: θ
- Stichprobenvariablen: $X_1, X_2, \ldots, X_n$
- Annahme: $X_1, \ldots, X_n$ unabhängig und identisch verteilt wie X
- Stichprobenmittelwert: $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ (entspricht der relativen Häufigkeit, falls X dichotom)
- Stichprobenvarianz: $S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$
- Realisationen: $x_1, x_2, \ldots, x_n$
- Schätzfunktion/Schätzstatistik/Teststatistik: $T = g(X_1, \ldots, X_n)$
- Schätzwert: $\hat{\theta} = g(x_1, \ldots, x_n)$

Abkürzungen der Quantile:

z_p ... p-Quantil der Standardnormalverteilung (siehe S. 48)
$t_{p,k}$ ... p-Quantil der t-Verteilung mit k Freiheitsgraden (siehe S. 49)
$\chi^2_{p,k}$ ... p-Quantil der χ^2-Verteilung mit k Freiheitsgraden (siehe S. 50)

8.1 Punktschätzung

Erwartungstreue:

Eine Schätzstatistik T heißt erwartungstreu für θ, wenn gilt

$$\mathrm{E}_\theta(T) = \theta$$

Asymptotische Erwartungstreue:

Eine Schätzstatistik T heißt asymptotisch erwartungstreu für θ, wenn gilt

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{E}_\theta(T) = \theta$$

Bias:

Eine nicht erwartungstreue Schätzstatistik heißt verzerrt. Die Stärke der Verzerrung wird durch den Bias angegeben

$$\mathrm{Bias}_\theta(T) = \mathrm{E}_\theta(T) - \theta$$

Erwartete mittlere quadratische Abweichung (MSE):

Die erwartete mittlere quadratische Abweichung (mean squared error) ist bestimmt durch

$$\mathrm{MSE} = \mathrm{E}_\theta([T-\theta]^2) = \mathrm{Var}_\theta(T) + \mathrm{Bias}_\theta(T)^2$$

MSE-Konsistenz (Konsistenz im quadratischen Mittel):

Eine Schätzstatistik heißt MSE-konsistent, wenn gilt

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{MSE} = 0.$$

Eine Schätzstatistik T heißt schwach konsistent, wenn zu beliebigem $\epsilon > 0$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} P(|T-\theta| < \epsilon) = 1 \quad \text{bzw.} \quad \lim_{n\to\infty} P(|T-\theta| \geq \epsilon) = 0.$$

MSE-Wirksamkeit (MSE-Effizienz):

Von zwei Schätzstatistiken T_1 und T_2 heißt T_1 MSE-wirksamer (MSE-effizient), wenn gilt

$$\mathrm{MSE}(T_1) \leq \mathrm{MSE}(T_2)$$

Momenten-Schätzung:

Die Parameter $\theta_1, \ldots, \theta_k$ der theoretischen Verteilung von X werden als Funktionen der Momente

$$\theta_i = h_i(\mu_1, \ldots, \mu_\ell), \quad \mu_j = E(X^j),\ j = 1, \ldots, \ell,\ i = 1, \ldots, k \tag{1}$$

angegeben. Die Momentenschätzer $\hat{\theta}_i, i = 1, \ldots, k$ werden berechnet, indem in (1) die empirischen Momente $\hat{\mu}_j = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i^j$ für die Momente μ_j eingesetzt werden.

Maximum-Likelihood-Schätzung:

Der Maximum-Likelihood-Schätzwert $\hat{\theta}$ ist die Lösung der Gleichung

$$L(\hat{\theta}) = \max_\theta L(\theta)$$

bzw.

$$f(x_1, \ldots, x_n|\hat{\theta}) = \max_\theta f(x_1, \ldots, x_n|\theta)$$

Zur praktischen Berechnung von $\hat{\theta}$ wird üblicherweise die *Log-Likelihood* $\ln L(\theta)$ gebildet und diese bezüglich θ maximiert.

Bayes-Schätzung:

- Bayes-Inferenz
  Sei
  - $f(x|\theta)$ die Wahrscheinlichkeitsfunktion bzw. Dichte von X, gegeben θ
  - $L(\theta) = f(x_1, \ldots, x_n|\theta)$ die gemeinsame Dichte bzw. Likelihoodfunktion für n unabhängige Wiederholungen
  - $f(\theta)$ eine *a priori Dichte* für den unbekannten Parameter

  Dann ist die *a posteriori Dichte* als Basis zur Bestimmung eines Bayes-Schätzers für θ gegeben durch

  $$f(\theta|x_1, \ldots, x_n) = \frac{f(x_1|\theta)\cdots f(x_n|\theta)f(\theta)}{\int f(x_1|\theta)\cdots f(x_n|\theta)f(\theta)d\theta} = \frac{L(\theta)f(\theta)}{\int L(\theta)f(\theta)d\theta}$$

- Bayes-Schätzer
  Mögliche Bayes-Schätzer für θ basierend auf der a posteriori Dichte sind
  - a posteriori Erwartungswert:

    $$\hat{\theta} = \mathrm{E}(\theta|x_1, \ldots, x_n) = \int \theta f(\theta|x_1, \ldots, x_n)d\theta$$

  - a posteriori Modus, maximum a posteriori Schätzer:
    Wähle für $\hat{\theta}$ denjenigen Parameterwert, für den die a posteriori Dichte maximal wird, d.h.

    $$L(\hat{\theta})f(\hat{\theta}) = \max_\theta L(\theta)f(\theta)$$

    bzw.

    $$\ln L(\hat{\theta}) + \ln f(\hat{\theta}) = \max_\theta \{\ln L(\theta) + \ln f(\theta)\}$$

8.2 Intervallschätzung

$(1-\alpha)$-Konfidenzintervall:

Die beiden Schätzstatistiken

$$G_u = g_u(X_1, \ldots, X_n) \quad \text{und} \quad G_o = g_o(X_1, \ldots, X_n)$$

bilden ein $(1-\alpha)$-Konfidenzintervall für θ, falls gilt

$$P(G_u \leq G_o) = 1 \quad \text{und} \quad P(G_u \leq \theta \leq G_o) = 1 - \alpha$$

Das Konfidenzintervall besitzt dann die Gestalt

$$\mathrm{KI} = [g_u(x_1, \ldots, x_n), g_o(x_1, \ldots, x_n)]$$

Einseitige $(1-\alpha)$-Konfidenzintervalle:

Für $G_u = -\infty$ bzw. $G_o = \infty$ ergibt sich

$$P(\theta \leq G_o) = 1 - \alpha \quad \text{bzw.} \quad P(G_u \leq \theta) = 1 - \alpha$$

und man erhält die Konfidenzintervalle

$$\text{KI} = (-\infty, g_o(x_1, \ldots, x_n)] \quad \text{bzw.} \quad \text{KI} = [g_u(x_1, \ldots, x_n), \infty)$$

8.3 Spezielle Schätzprobleme

Verteilung	θ	$\hat{\theta}$	$(1-\alpha)$-Konfidenzintervall
$X \sim N(\mu, \sigma^2)$, σ^2 bekannt	μ	$\bar{X}$	$\left[\bar{X} - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \bar{X} + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$
$X \sim N(\mu, \sigma^2)$, σ^2 unbekannt	μ	$\bar{X}$	$\left[\bar{X} - t_{1-\frac{\alpha}{2},n-1} \frac{S}{\sqrt{n}},\ \bar{X} + t_{1-\frac{\alpha}{2},n-1} \frac{S}{\sqrt{n}}\right]$
$X \sim N(\mu, \sigma^2)$, μ beliebig	σ^2	S^2	$\left[(n-1)S^2 \frac{1}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2},n-1}},\ (n-1)S^2 \frac{1}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2},n-1}}\right]$

Verteilung	θ	$\hat{\theta}$	approximatives $(1-\alpha)$-Konfidenzintervall
X beliebig verteilt, $n \geq 30$, $\text{E}(X) = \mu$, $\text{Var}(X) = \sigma^2$ bekannt	μ	$\bar{X}$	$\left[\bar{X} - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \bar{X} + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$
X beliebig verteilt, $n \geq 30$, $\text{E}(X) = \mu$, $\text{Var}(X) = \sigma^2$ unbekannt	μ	$\bar{X}$	$\left[\bar{X} - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{S}{\sqrt{n}},\ \bar{X} + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{S}{\sqrt{n}}\right]$
X dichotom, $n \geq 30$ $\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} X_i \sim B(n, \pi)$, $n \geq 30$	π	$\bar{X}$	$\left[\hat{\pi} - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\hat{\pi}(1-\hat{\pi})}{n}},\ \hat{\pi} + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\hat{\pi}(1-\hat{\pi})}{n}}\right]$

8.4 Testen von Hypothesen

Statistisches Testproblem:

Nullhypothese H_0 und Alternative H_1 treffen Aussagen über θ

$$H_0 : \theta \in \Theta_0 \quad \text{vs.} \quad H_1 : \theta \in \Theta_1$$

Die Entscheidung für oder gegen H_0 wird anhand einer Prüfgröße (Teststatistik) getroffen.

Fehlentscheidung:

- Fehler 1.Art: H_0 wird verworfen, obwohl H_0 zutrifft
- Fehler 2.Art: H_0 wird beibehalten, obwohl H_1 zutrifft

Signifikanztest:

Falls gilt

$$P(H_0 \text{ verwerfen} | H_0 \text{ trifft zu}) \leq \alpha \qquad (\text{d.h. } P(\text{Fehler 1.Art}) \leq \alpha),$$

dann heißt der Test Signifikanztest, oder Test zum *Signifikanzniveau* α

***p*-Wert:**

Der p-Wert ist definiert als die Wahrscheinlichkeit, unter H_0 den beobachteten Prüfgrößenwert oder einen in Richtung der Alternative extremeren Wert zu erhalten.

Gütefunktion:

Für vorgegebenes Signifikanzniveau α und festen Stichprobenumfang n gibt die Gütefunktion g die Wahrscheinlichkeit für einen statistischen Test an, die Nullhypothese über θ zu verwerfen, d.h.

$$g(\theta) = P(H_0 \text{ verwerfen} | \theta).$$

Gilt $\theta \in H_0$, so ist $g(\theta) \leq \alpha$. Falls $\theta \in H_1$, so ist $1 - g(\theta)$ die Wahrscheinlichkeit β für den Fehler 2.Art.

8.5 Spezielle Testprobleme

8.5.1 Einstichproben-Testprobleme

Formulierung der Hypothesen:

- Zweiseitiges Testproblem:

$$(a) \qquad H_0 : \theta = \theta_0 \quad \text{vs.} \quad H_1 : \theta \neq \theta_0$$

- Einseitige Testprobleme:

$$(b) \qquad H_0 : \theta \geq \theta_0 \quad \text{vs.} \quad H_1 : \theta < \theta_0$$

$$(c) \qquad H_0 : \theta \leq \theta_0 \quad \text{vs.} \quad H_1 : \theta > \theta_0$$

Verteilung	θ	Teststatistik	Ablehnbereiche
$X \sim N(\mu, \sigma^2)$, σ^2 bekannt	μ	$Z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma}\sqrt{n}$	(a) $\lvert Z\rvert > z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ (b) $Z < -z_{1-\alpha}$ (c) $Z > z_{1-\alpha}$
$X \sim N(\mu, \sigma^2)$, σ^2 unbekannt	μ	$T = \frac{\bar{X} - \mu_0}{S}\sqrt{n}$	(a) $\lvert T\rvert > t_{1-\frac{\alpha}{2},n-1}$ (b) $T < -t_{1-\alpha,n-1}$ (c) $T > t_{1-\alpha,n-1}$
X beliebig verteilt, $n \geq 30$, $\mathrm{E}(X) = \mu$, $\mathrm{Var}(X) = \sigma^2$ bekannt	μ	$Z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma}\sqrt{n}$	(a) $\lvert Z\rvert > z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ (b) $Z < -z_{1-\alpha}$ (c) $Z > z_{1-\alpha}$
X beliebig verteilt, $n \geq 30$, $\mathrm{E}(X) = \mu$, $\mathrm{Var}(X) = \sigma^2$ unbekannt	μ	$T = \frac{\bar{X} - \mu_0}{S}\sqrt{n}$	(a) $\lvert T\rvert > z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ (b) $T < -z_{1-\alpha}$ (c) $T > z_{1-\alpha}$
X dichotom $\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} X_i \sim B(n, \pi)$	π	$Z = \frac{\hat{\pi} - \pi_0}{\sqrt{\pi_0(1-\pi_0)}}\sqrt{n}$	(a) $\lvert Z\rvert > z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ (b) $Z < -z_{1-\alpha}$ (c) $Z > z_{1-\alpha}$

Gütefunktion für Spezialfall Einstichproben-Gauß-Test

Gegeben seien iid Zufallsvariablen $X_1, \ldots, X_n$ mit $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$, σ^2 bekannt, bzw. mit beliebiger stetiger Verteilung und $E(X_i) = \mu$, $Var(X_i) = \sigma^2$, $n \geq 30$.
Für die Gütefunktion $g(\mu)$ ergibt sich dann im Fall des Testproblems

(a) $H_0 : \mu = \mu_0$ vs. $H_1 : \mu \neq \mu_0$

$$g(\mu) = \Phi\left(-z_{1-\alpha/2} + \frac{\mu - \mu_0}{\sigma}\sqrt{n}\right) + \Phi\left(-z_{1-\alpha/2} - \frac{\mu - \mu_0}{\sigma}\sqrt{n}\right)$$

(b) $H_0 : \mu \geq \mu_0$ vs. $H_1 : \mu < \mu_0$

$$g(\mu) = \Phi\left(z_\alpha - \frac{\mu - \mu_0}{\sigma}\sqrt{n}\right)$$

(c) $H_0 : \mu \leq \mu_0$ vs. $H_1 : \mu > \mu_0$

$$g(\mu) = 1 - \Phi\left(z_{1-\alpha} - \frac{\mu - \mu_0}{\sigma}\sqrt{n}\right)$$

wobei Φ die Verteilungsfunktion der $N(0{,}1)$-Verteilung ist.

8.5.2 Zweistichproben-Mittelwertsvergleiche

Bezeichnungen:

- Metrische Merkmale X und Y
- Unbekannte Parameter: $\mathrm{E}(X) = \mu_X$ und $\mathrm{E}(Y) = \mu_Y$
- Stichprobenvariablen: $X_1, X_2, \ldots, X_n$ und $Y_1, Y_2, \ldots, Y_m$
- Annahmen: $X_1, \ldots, X_n$ unabhängig und identisch verteilt wie X
  $Y_1, \ldots, Y_m$ unabhängig und identisch verteilt wie Y
  $X_1, \ldots, X_n, Y_1, \ldots, Y_m$ unabhängig

Formulierung der Hypothesen:

- Zweiseitiges Testproblem:

  (a) $H_0 : \mu_X - \mu_Y = \delta_0$ vs. $H_1 : \mu_X - \mu_Y \neq \delta_0$

- Einseitige Testprobleme:

  (b) $H_0 : \mu_X - \mu_Y \geq \delta_0$ vs. $H_1 : \mu_X - \mu_Y < \delta_0$

  (c) $H_0 : \mu_X - \mu_Y \leq \delta_0$ vs. $H_1 : \mu_X - \mu_Y > \delta_0$

Verteilung	Teststatistik	Ablehnbereiche
$X \sim N(\mu_X, \sigma_X^2)$, $Y \sim N(\mu_Y, \sigma_Y^2)$ σ_X^2, σ_Y^2 bekannt	$Z = \frac{\bar{X} - \bar{Y} - \delta_0}{\sqrt{\frac{\sigma_X^2}{n} + \frac{\sigma_Y^2}{m}}}$	(a) $\lvert Z\rvert > z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ (b) $Z < -z_{1-\alpha}$ (c) $Z > z_{1-\alpha}$
$X \sim N(\mu_X, \sigma_X^2)$, $Y \sim N(\mu_Y, \sigma_Y^2)$ $\sigma_X^2 = \sigma_Y^2$ unbekannt	$T = \frac{\bar{X} - \bar{Y} - \delta_0}{\sqrt{\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{m}\right)\frac{(n-1)S_X^2 + (m-1)S_Y^2}{n+m-2}}}$	(a) $\lvert T\rvert > t_{1-\frac{\alpha}{2},n+m-2}$ (b) $T < -t_{1-\alpha,n+m-2}$ (c) $T > t_{1-\alpha,n+m-2}$
X, Y beliebig verteilt σ_X^2, σ_Y^2 unbekannt, $n, m > 30$	$T = \frac{\bar{X} - \bar{Y} - \delta_0}{\sqrt{\frac{S_X^2}{n} + \frac{S_Y^2}{m}}}$	(a) $\lvert T\rvert > z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ (b) $T < -z_{1-\alpha}$ (c) $T > z_{1-\alpha}$

8.5.3 Weitere Testprobleme

Vorzeichen–Test:

- Annahmen: $X_1, \ldots, X_n$ unabhängige Wiederholungen, X besitzt stetige Verteilungsfunktion
- Hypothesen:
$$\begin{array}{llll} (a) & H_0 : x_{med} = \delta_0 & \text{vs.} & H_1 : x_{med} \neq \delta_0 \\ (b) & H_0 : x_{med} \geq \delta_0 & \text{vs.} & H_1 : x_{med} < \delta_0 \\ (c) & H_0 : x_{med} \leq \delta_0 & \text{vs.} & H_1 : x_{med} > \delta_0 \end{array}$$
- Teststatistik:
$$A = \text{Anzahl der Stichprobenvariablen mit einem Wert kleiner als } \delta_0$$
- Ablehnungsbereiche:
$$\begin{array}{ll} (a) & A \leq b_{\alpha/2} \quad \text{oder} \quad n - A \leq b_{\alpha/2} \\ (b) & A > o_{1-\alpha} \\ (c) & A \leq b_\alpha \end{array}$$
Die kritischen Schranken $b_{\alpha/2}$, $o_{1-\alpha}$ und b_α sind bestimmt durch
$$\begin{array}{lrcl} (a) & B(b_{\alpha/2}) \leq & \alpha/2 & < B(b_{\alpha/2}+1) \\ (b) & B(o_{1-\alpha}) < & 1-\alpha & \leq B(o_{1-\alpha}+1) \\ (c) & B(b_\alpha) \leq & \alpha & < B(b_\alpha+1) \end{array}$$
wobei B die Verteilungsfunktion der $B(n, 0.5)$–Verteilung bezeichnet.
- Bemerkung: Für $n \geq 25$ ist die Teststatistik unter H_0 approximativ $N(0.5n, 0.25n)$–verteilt.

Wilcoxon–Vorzeichen–Rang–Test:

- Annahmen: $X_1, \ldots, X_n$ unabhängig und identisch verteilt wie X
  X metrisch skaliert mit stetiger und symmetrischer Verteilungsfunktion.
- Hypothesen:
$$\begin{array}{llll} (a) & H_0 : x_{med} = \delta_0 & \text{vs.} & H_1 : x_{med} \neq \delta_0 \\ (b) & H_0 : x_{med} \geq \delta_0 & \text{vs.} & H_1 : x_{med} < \delta_0 \\ (c) & H_0 : x_{med} \leq \delta_0 & \text{vs.} & H_1 : x_{med} > \delta_0 \end{array}$$
- Teststatistik:
$$W^+ = \sum_{i=1}^{n} rg(|D_i|) Z_i \text{ mit } D_i = X_i - \delta_0, \quad Z_i = \begin{cases} 1, & D_i > 0 \\ 0, & D_i < 0 \end{cases}$$
- Ablehnungsbereiche:
$$\begin{array}{ll} (a) & W^+ < w^+_{\alpha/2,n} \quad \text{oder} \quad W^+ > w^+_{1-\alpha/2,n} \\ (b) & W^+ < w^+_{\alpha,n} \\ (c) & W^+ > w^+_{1-\alpha,n} \end{array}$$
wobei $w^+_{\alpha,n}$ das tabellierte α-Quantil der Verteilung von W^+ ist.
- Bemerkung: Für $n > 20$ ist die Teststatistik unter H_0 approximativ $N(\frac{n(n+1)}{4}, \frac{n(n+1)(2n+1)}{24})$–verteilt.

Wilcoxon–Rangsummen–Test:

- Annahmen: $X_1, \ldots, X_n$ unabhängig und identisch verteilt wie X
  $Y_1, \ldots, Y_m$ unabhängig und identisch verteilt wie Y
  $X_1, \ldots, X_n$ und $Y_1, \ldots, Y_m$ unabhängig
  X und Y besitzen stetige Verteilungsfunktionen F bzw. G

- Hypothesen:

$$\begin{array}{llcl} (a) & H_0 : x_{med} = y_{med} & \text{vs.} & H_1 : x_{med} \neq y_{med} \\ (b) & H_0 : x_{med} \geq y_{med} & \text{vs.} & H_1 : x_{med} < y_{med} \\ (c) & H_0 : x_{med} \leq y_{med} & \text{vs.} & H_1 : x_{med} > y_{med} \end{array}$$

- Teststatistik:

$$T_W = \sum_{i=1}^{n} rg(X_i) = \sum_{i=1}^{n+m} iV_i$$

  mit

$$V_i = \begin{cases} 1, & i\text{-te Beobachtung der gepoolten Stichprobe ist } X\text{-Variable} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

- Ablehnungsbereiche:

$$\begin{array}{ll} (a) & T_W < w_{\alpha/2;n,m} \quad \text{oder} \quad T_W > w_{1-\alpha/2;n,m} \\ (b) & T_W < w_{\alpha;n,m} \\ (c) & T_W > w_{1-\alpha;n,m} \end{array}$$

  wobei $w_{\tilde{\alpha}}$ das tabellierte $\tilde{\alpha}$-Quantil der Verteilung von T_W ist.

- Bemerkung:
  Für m oder $n > 25$ ist die Teststatistik unter H_0 approximativ $N(\frac{n(n+m+1)}{2}, \frac{nm(n+m+1)}{12})$–verteilt.

χ^2-Anpassungstest:

- Annahmen: $X_1, \ldots, X_n$ unabhängig und identisch verteilt wie X
  Einteilung der Daten in k disjunkte Klassen

- Hypothesen:

$$\begin{array}{lll} H_0: & P(X = i) = \pi_i & \text{für } i = 1, \ldots, k \\ H_1: & P(X = i) \neq \pi_i & \text{für mindestens ein } i \end{array}$$

- Teststatistik:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(h_i - n\pi_i)^2}{n\pi_i}$$

- Ablehnungsbereich:

$$\chi^2 > \chi^2_{1-\alpha,k-1-\text{Anzahl der unter } H_0 \text{ zu schätzenden Parameter}}$$

- Faustregel:
  Approximative Verteilung der Teststatistik gilt, wenn $n\pi_i \geq 1$ für alle Klassen und $n\pi_i \geq 5$ für mindestens 80% der Klassen erfüllt ist.

χ^2-Homogenitätstest:

- Annahmen: Unabhängige Stichproben aus k Populationen mit den Stichprobenumfängen $n_1, \ldots, n_k$

- Hypothesen:

$$\begin{array}{lll} H_0: & P(X_1 = j) = \ldots = P(X_k = j) & \text{für } j = 1 \ldots, m \\ H_1: & P(X_{i_1} = j) \neq P(X_{i_2} = j) & \text{für mindestens ein Tupel } (i_1, i_2, j) \end{array}$$

$$\begin{array}{c|ccc|c} & & X & & \\ & 1 & \ldots & m & \\ \hline 1 & h_{11} & \ldots & h_{1m} & n_1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ k & h_{k1} & \ldots & h_{km} & n_k \\ \hline & h_{\bullet 1} & \ldots & h_{\bullet m} & n \end{array} \quad \underset{\longrightarrow}{\text{unter } H_0} \quad \begin{array}{c|ccc|c} & & X & & \\ & 1 & \ldots & m & \\ \hline 1 & \frac{n_1 h_{\bullet 1}}{n} & \ldots & \frac{n_1 h_{\bullet m}}{n} & n_1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ k & \frac{n_k h_{\bullet 1}}{n} & \ldots & \frac{n_k h_{\bullet m}}{n} & n_k \\ \hline & h_{\bullet 1} & \ldots & h_{\bullet m} & n \end{array}$$

- Teststatistik:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{m} \frac{(h_{ij} - \hat{h}_{ij})^2}{\hat{h}_{ij}} \quad \text{mit} \quad \hat{h}_{ij} = \frac{n_i h_{\bullet j}}{n}$$

- Ablehnungsbereich:

$$\chi^2 > \chi^2_{1-\alpha,(k-1)\cdot(m-1)}$$

χ^2-Unabhängigkeitstest:

- Annahmen: Unabhängige Stichprobenvariablen $(X_i, Y_i),\ i = 1, \dots, n$
- Hypothesen:

$$\begin{array}{lll} H_0: & P(X=i, Y=j) = P(X=i)\cdot P(Y=j) & \text{für alle } i,j \\ H_1: & P(X=i, Y=j) \neq P(X=i)\cdot P(Y=j) & \text{für mindestens ein Paar } (i,j) \end{array}$$

$$\begin{array}{cc|ccc|c} & & & Y & & \\ & & 1 & \dots & m & \\ \hline & 1 & h_{11} & \dots & h_{1m} & h_{1\bullet} \\ X & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ & k & h_{k1} & \dots & h_{km} & h_{k\bullet} \\ \hline & & h_{\bullet 1} & \dots & h_{\bullet m} & n \end{array} \quad \overset{\text{unter } H_0}{\longrightarrow} \quad \begin{array}{cc|ccc|c} & & & Y & & \\ & & 1 & \dots & m & \\ \hline & 1 & \frac{h_{1\bullet}h_{\bullet 1}}{n} & \dots & \frac{h_{1\bullet}h_{\bullet m}}{n} & h_{1\bullet} \\ X & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ & k & \frac{h_{k\bullet}h_{\bullet 1}}{n} & \dots & \frac{h_{k\bullet}h_{\bullet m}}{n} & h_{k\bullet} \\ \hline & & h_{\bullet 1} & \dots & h_{\bullet m} & n \end{array}$$

- Teststatistik:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{m} \frac{(h_{ij} - \tilde{h}_{ij})^2}{\tilde{h}_{ij}} \quad \text{mit} \quad \tilde{h}_{ij} = \frac{h_{i\bullet}h_{\bullet j}}{n}$$

- Ablehnungsbereich:

$$\chi^2 > \chi^2_{1-\alpha,(k-1)\cdot(m-1)}$$

Korrelationstest:

- Annahmen: Unabhängige gemeinsam normalverteilte Stichprobenvariablen $(X_i, Y_i),\ i = 1, \dots, n$
- Hypothesen:

$$\begin{array}{llll} \text{(a)} & H_0: \rho_{XY} = \rho_0 & \text{gegen} & H_1: \rho_{XY} \neq \rho_0 \\ \text{(b)} & H_0: \rho_{XY} \geq \rho_0 & \text{gegen} & H_1: \rho_{XY} < \rho_0 \\ \text{(c)} & H_0: \rho_{XY} \leq \rho_0 & \text{gegen} & H_1: \rho_{XY} > \rho_0 \end{array}$$

- Teststatistik für $\rho_0 = 0$

$$T = \frac{r_{XY}}{\sqrt{1 - r_{XY}^2}}\sqrt{n-2} \overset{H_0}{\sim} t_{n-2},$$

bzw. für $\rho_0 = \rho_{XY}$

$$Z = \frac{1}{2}\left(\ln\frac{1 + r_{XY}}{1 - r_{XY}} - \ln\frac{1+\rho_0}{1-\rho_0}\right)\sqrt{n-3} \overset{H_0, n>25}{\sim} N(0,1).$$

- Ablehnungsbereiche:

$$\begin{array}{lll} \text{(a) } |T| > t_{1-\alpha/2,n-2} & \text{bzw.} & |Z| > z_{1-\alpha/2} \\ \text{(b) } T < -t_{1-\alpha,n-2} & \text{bzw.} & Z < -z_{1-\alpha} \\ \text{(c) } T > -t_{1-\alpha,n-2} & \text{bzw.} & Z > z_{1-\alpha}. \end{array}$$

9 Regressionsanalyse

9.1 Lineare Einfachregression

Lineare Einfachregression:

Y	abhängige (zu erklärende) Variable, Zielgröße, Regressand
X	unabhängige (erklärende) Variable, Einflussgröße, Regressor

Regressionsansatz:

$$Y = f(X) + \epsilon = \alpha + \beta X + \epsilon$$

Bezeichnungen:

- geschätzte Regressionsgerade: $\hat{Y} = \hat{\alpha} + \hat{\beta} x$
- Regressionskoeffizienten: $\hat{\alpha}$ und $\hat{\beta}$
- Residuen: $\hat{\epsilon}_i = Y_i - \hat{Y}_i = Y_i - (\hat{\alpha} + \hat{\beta} x_i)$

Normalverteilungsannahme:

$$\epsilon_i \sim N(0, \sigma^2) \quad \Leftrightarrow \quad Y_i \sim N(\alpha + \beta x_i\ , \sigma^2), \quad i = 1, \ldots, n.$$

Kleinste-Quadrate-Schätzer:

$$\hat{\alpha} = \bar{Y} - \hat{\beta}\bar{x}\ , \qquad \hat{\beta} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(Y_i - \bar{Y})}{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i Y_i - n\bar{x}\bar{Y}}{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 - n\bar{x}^2}$$

Schätzer für die Varianz $\boldsymbol{\sigma^2}$:

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-2}\sum_{i=1}^{n}\hat{\epsilon}_i^2 = \frac{1}{n-2}\sum_{i=1}^{n}(Y_i - (\hat{\alpha} + \hat{\beta} x_i))^2$$

Verteilung der geschätzten Regressionskoeffizienten:

$$\hat{\alpha} \sim N(\alpha, \sigma^2_{\hat{\alpha}}) \quad \text{mit} \quad \mathrm{Var}(\hat{\alpha}) = \sigma^2_{\hat{\alpha}} = \sigma^2 \frac{\sum x_i^2}{n\sum(x_i - \bar{x})^2} = \sigma^2 \frac{\sum x_i^2}{n(\sum x_i^2 - n\bar{x}^2)}$$

$$\hat{\beta} \sim N(\beta, \sigma^2_{\hat{\beta}}) \quad \text{mit} \quad \mathrm{Var}(\hat{\beta}) = \sigma^2_{\hat{\beta}} = \frac{\sigma^2}{\sum(x_i - \bar{x})^2} = \frac{\sigma^2}{\sum x_i^2 - n\bar{x}^2}$$

Verteilung der standardisierten Schätzfunktionen:

$$\frac{\hat{\alpha} - \alpha}{\hat{\sigma}_{\hat{\alpha}}} \sim t_{n-2} \quad \text{mit} \quad \hat{\sigma}_{\hat{\alpha}} = \hat{\sigma}\frac{\sqrt{\sum x_i^2}}{\sqrt{n\sum(x_i - \bar{x})^2}} = \hat{\sigma}\frac{\sqrt{\sum x_i^2}}{\sqrt{n(\sum x_i^2 - n\bar{x}^2)}}$$

$$\frac{\hat{\beta} - \beta}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}}} \sim t_{n-2} \quad \text{mit} \quad \hat{\sigma}_{\hat{\beta}} = \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{\sum(x_i - \bar{x})^2}} = \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{\sum x_i^2 - n\bar{x}^2}}$$

$(1-\boldsymbol{\alpha})$-Konfidenzintervalle für $\boldsymbol{\alpha}$ und $\boldsymbol{\beta}$:

$$\text{für } \alpha: \quad \left[\hat{\alpha} - \hat{\sigma}_{\hat{\alpha}} t_{1-\frac{\alpha}{2}, n-2},\ \hat{\alpha} + \hat{\sigma}_{\hat{\alpha}} t_{1-\frac{\alpha}{2}, n-2}\right]$$

$$\text{für } \beta: \quad \left[\hat{\beta} - \hat{\sigma}_{\hat{\beta}} t_{1-\frac{\alpha}{2}, n-2},\ \hat{\beta} + \hat{\sigma}_{\hat{\beta}} t_{1-\frac{\alpha}{2}, n-2}\right]$$

Teststatistiken:

$$T_{\alpha_0} = \frac{\hat{\alpha} - \alpha_0}{\hat{\sigma}_{\hat{\alpha}}} \quad \text{und} \quad T_{\beta_0} = \frac{\hat{\beta} - \beta_0}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}}}$$

Hypothesen und Ablehnbereiche:

Hypothesen			Ablehnbereich
$H_0: \alpha = \alpha_0$	vs.	$H_1: \alpha \neq \alpha_0$	$\lvert T_{\alpha_0}\rvert > t_{1-\frac{\alpha}{2}, n-2}$
$H_0: \beta = \beta_0$	vs.	$H_1: \beta \neq \beta_0$	$\lvert T_{\beta_0}\rvert > t_{1-\frac{\alpha}{2}, n-2}$
$H_0: \alpha \geq \alpha_0$	vs.	$H_1: \alpha < \alpha_0$	$T_{\alpha_0} < -t_{1-\alpha, n-2}$
$H_0: \beta \geq \beta_0$	vs.	$H_1: \beta < \beta_0$	$T_{\beta_0} < -t_{1-\alpha, n-2}$
$H_0: \alpha \leq \alpha_0$	vs.	$H_1: \alpha > \alpha_0$	$T_{\alpha_0} > t_{1-\alpha, n-2}$
$H_0: \beta \leq \beta_0$	vs.	$H_1: \beta > \beta_0$	$T_{\beta_0} > t_{1-\alpha, n-2}$

Prognose:

$$\hat{Y}_0 = \hat{\alpha} + \hat{\beta} x_0$$

Konfidenzintervall für $\boldsymbol{Y_0}$:

$$\left[\hat{Y}_0 - t_{1-\frac{\alpha}{2}, n-2}\hat{\sigma}\sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{(x_0 - \bar{x})^2}{\sum x_i^2 - n\bar{x}^2}}\ , \hat{Y}_0 + t_{1-\frac{\alpha}{2}, n-2}\hat{\sigma}\sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{(x_0 - \bar{x})^2}{\sum x_i^2 - n\bar{x}^2}}\ \right]$$

Quadratsummenzerlegung:

$$\underbrace{\sum_{i=1}^{n}(Y_i-\bar{Y})^2}_{SQT} = \underbrace{\sum_{i=1}^{n}(\hat{Y}_i-\bar{Y})^2}_{SQE} + \underbrace{\sum_{i=1}^{n}(Y_i-\hat{Y}_i)^2}_{SQR}$$

SQT: Gesamtabweichungsquadratsumme in Y-Richtung
SQE: Durch die Regression erklärter Teil von SQT
SQR: Trotz der Regression unerklärt bleibender Teil von SQT

Bestimmtheitsmaß:

$$R^2 = \frac{SQE}{SQT} = 1 - \frac{SQR}{SQT}, \qquad \text{Berechnung:} \quad R^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(\hat{Y}_i-\bar{Y})^2}{\sum_{i=1}^{n}(Y_i-\bar{Y})^2} = \frac{\sum_{i=1}^{n}\hat{Y}_i^2 - n\bar{Y}^2}{\sum_{i=1}^{n}Y_i^2 - n\bar{Y}^2}$$

9.2 Multiple lineare Regression in Summennotation

Regressionsansatz:

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2} + \ldots + \beta_p x_{ip} + \epsilon_i\ , \quad i=1,\ldots,n.$$

Normalverteilungsannahme:

$$\epsilon_i \sim N(0,\sigma^2), \quad \Leftrightarrow \quad Y_i \sim N(\beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \ldots + \beta_p x_{ip}\ ,\sigma^2), \quad i=1,\ldots,n.$$

Gefittete Werte:

$$\hat{Y}_i = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_{i1} + \hat{\beta}_2 x_{i2} + \ldots + \hat{\beta}_p x_{ip}$$

Residuen:

$$\hat{\epsilon}_i = Y_i - \hat{Y}_i\ , \quad i=1,\ldots,n.$$

Schätzer für die Varianz $\boldsymbol{\sigma^2}$:

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-p-1}\sum_{i=1}^{n}\hat{\epsilon}_i^2 = \frac{1}{n-p-1}\sum_{i=1}^{n}(Y_i-\hat{Y}_i)^2$$

Verteilung der standardisierten Schätzfunktionen:

$$\frac{\hat{\beta}_j - \beta_j}{\hat{\sigma}_j} \sim t_{n-p-1}\ , \quad j=0,\ldots,p$$

$(1-\alpha)$-Konfidenzintervalle für $\boldsymbol{\beta_j}$:

$$\left[\hat{\beta}_j - \hat{\sigma}_j t_{1-\frac{\alpha}{2},n-p-1},\ \hat{\beta}_j + \hat{\sigma}_j t_{1-\frac{\alpha}{2},n-p-1}\right]$$

Teststatistiken:

$$T_j = \frac{\hat{\beta}_j - \beta_{0j}}{\hat{\sigma}_j}\ , \quad j=0,\ldots,p$$

Hypothesen und Ablehnbereiche:

Hypothesen			Ablehnbereich
$H_0: \beta_j = \beta_{0j}$	vs.	$H_1: \beta_j \neq \beta_{0j}$	$\lvert T_j\rvert > t_{1-\frac{\alpha}{2},n-p-1}$
$H_0: \beta_j \geq \beta_{0j}$	vs.	$H_1: \beta_j < \beta_{0j}$	$T_j < -t_{1-\alpha,n-p-1}$
$H_0: \beta_j \leq \beta_{0j}$	vs.	$H_1: \beta_j > \beta_{0j}$	$T_j > t_{1-\alpha,n-p-1}$

Overall–F–Test:

- Hypothesen:

$$H_0: \quad \beta_1 = \ldots = \beta_p = 0$$
$$H_1: \quad \beta_j \neq 0 \quad \text{für mindestens ein } j$$

- Teststatistik:

$$F = \frac{R^2}{1-R^2}\,\frac{n-p-1}{p} = \frac{SQE}{SQR}\,\frac{n-p-1}{p}$$

- Ablehnungsbereich:

$$F > F_{1-\alpha;p,n-p-1}$$

9.3 Multiple lineare Regression in Matrixnotation

- Modell in Matrixnotation:

$$\mathbf{y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\epsilon}, \quad \mathrm{E}(\boldsymbol{\epsilon}) = \mathbf{0}, \quad \mathrm{Var}(\boldsymbol{\epsilon}) = \mathbf{E}(\boldsymbol{\epsilon}\boldsymbol{\epsilon}') = \sigma^2\mathbf{I_n}$$

mit

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 & x_{11} & \cdots & x_{1p} \\ 1 & x_{21} & \cdots & x_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_{n1} & \cdots & x_{np} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\beta} = \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_p \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\epsilon} = \begin{pmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \vdots \\ \epsilon_n \end{pmatrix}$$

und I_n der n-dimensionalen Einheitsmatrix.

KQ-Schätzer für β:

- Aus dem KQ-Ansatz
$$(\mathbf{y}-\mathbf{X}\boldsymbol{\beta})'(\mathbf{y}-\mathbf{X}\boldsymbol{\beta}) \to \min_{\boldsymbol{\beta}}$$
ergibt sich durch Nullsetzen der ersten Ableitung nach $\boldsymbol{\beta}$ und, falls $\mathbf{X}'\mathbf{X}$ invertierbar ist, anschließendem Lösen des resultierenden Gleichungssystems der KQ-Schätzer
$$\hat{\boldsymbol{\beta}} = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{y}$$

- Varianz der Schätzer $\hat{\beta}_j$:
Mit den Diagonalelementen v_j aus $(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}$ erhält man für bekanntes σ^2 als Varianz von $\hat{\beta}_j$
$$\sigma_j^2 = \mathrm{Var}(\hat{\beta}_j) = \sigma^2 v_j$$
bzw. für unbekanntes σ^2 die geschätzte Varianz von $\hat{\beta}_j$ gemäß
$$\hat{\sigma}_j^2 = \hat{\sigma}^2 v_j.$$
Zusammenfassende Darstellung in Vektornotation
$$\mathrm{Var}(\hat{\boldsymbol{\beta}}) = \sigma^2(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} \quad \text{bzw.} \quad \widehat{\mathrm{Var}}(\hat{\boldsymbol{\beta}}) = \hat{\sigma}^2(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}$$

KQ-Schätzer für σ^2:
$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\hat{\boldsymbol{\epsilon}}'\hat{\boldsymbol{\epsilon}}}{n-p-1} = \frac{\mathbf{y}'\mathbf{y} - \hat{\boldsymbol{\beta}}'\mathbf{X}'\mathbf{y}}{n-p-1}$$

Prognose:
$$\hat{y}_0 = \mathbf{x}_0'\hat{\boldsymbol{\beta}}$$

Konfidenzintervall für $\hat{y}_0$:
$$\left[\hat{y}_0 - t_{1-\frac{\alpha}{2},n-p-1}\hat{\sigma}\sqrt{\mathbf{x}_0'(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{x}_0+1}\;,\hat{y}_0 + t_{1-\frac{\alpha}{2},n-p-1}\hat{\sigma}\sqrt{\mathbf{x}_0'(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{x}_0+1}\right]$$

Bestimmtheitsmaß und korrigiertes Bestimmtheitsmaß:

Bestimmtheitsmaß:
$$R^2 = \frac{\sum_{i=1}^n(\hat{y}_i-\bar{y})^2}{\sum_{i=1}^n(y_i-\bar{y})^2} = \frac{\hat{\boldsymbol{\beta}}'\mathbf{X}'\mathbf{y} - n\bar{y}^2}{\mathbf{y}'\mathbf{y} - n\bar{y}^2}$$

korrigiertes Bestimmtheitsmaß:
$$\bar{R}^2 = 1 - \frac{n-1}{n-p-1}(1-R^2)$$

Hypothesentests:

Sei $R_1 := (r_0, \ldots, r_p)$. Man betrachte folgende Testprobleme

$$\begin{array}{llll} \text{(a)} & H_0: R_1\boldsymbol{\beta} = r & \text{gegen} & H_1: R_1\boldsymbol{\beta} \neq r \\ \text{(b)} & H_0: R_1\boldsymbol{\beta} \geq r & \text{gegen} & H_1: R_1\boldsymbol{\beta} < r \\ \text{(c)} & H_0: R_1\boldsymbol{\beta} \leq r & \text{gegen} & H_1: R_1\boldsymbol{\beta} > r. \end{array}$$

Teststatistik:
$$T = \frac{R_1\hat{\boldsymbol{\beta}} - r}{\hat{\sigma}\sqrt{R_1(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}R_1'}} \overset{H_0}{\sim} t_{n-p-1}$$

Ablehnungsbereiche:

$$\begin{array}{ll} \text{(a)}, & |T| > t_{1-\frac{\alpha}{2},n-p-1} \\ \text{(b)}, & T < -t_{1-\alpha,n-p-1} \\ \text{(c)}, & T > t_{1-\alpha,n-p-1} \end{array}$$

Kodierung kategorialer Einflussgrößen:
Sei $M \in \{1, \ldots, m\}$ eine mehrkategoriale erklärende Variable mit m Kategorien.

Dummy-Kodierung:
$$x_i^M := \begin{cases} 1, & M = i, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases} \qquad i = 1, \ldots, m-1$$

Effekt-Kodierung:
$$x_i^M := \begin{cases} 1, & M = i, \\ -1, & M = m, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases} \qquad i = 1, \ldots, m-1$$

mit m als Referenzkategorie.

SPSS-Output einer multiplen Regression:

Coefficients[a]

Model		Unstandardized Coefficients		t	Sig.
		B	Std. Error		
1	(Constant)	$\hat{\beta}_0$	$\hat{\sigma}_0$	T_0	$P(T \geq T_0)$
	X_1	$\hat{\beta}_1$	$\hat{\sigma}_1$	T_1	$P(T \geq T_1)$
	X_2	$\hat{\beta}_2$	$\hat{\sigma}_2$	T_2	$P(T \geq T_2)$
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
	X_p	$\hat{\beta}_p$	$\hat{\sigma}_p$	T_p	$P(T \geq T_p)$

a Dependent Variable: Y

Testprobleme:

- t ist der Wert der t-Statistik für

$$H_0 : \beta_j = 0 \quad \text{vs.} \quad H_1 : \beta_j \neq 0 \ ,$$

d.h. $T_j = \dfrac{\hat{\beta}_j}{\hat{\sigma}_j}, \quad j = 0, \ldots, p$

- Sig. ist der zugehörige p-Wert

10 Varianzanalyse

10.1 Einfaktorielle Varianzanalyse

Modell 1:

$$Y_{ij} = \mu_i + \epsilon_{ij}, \quad \epsilon_{ij} \sim N(0, \sigma^2), \text{ unabhängig}, \quad i = 1, \ldots, I, \ j = 1, \ldots, n_i.$$

Modell 2:

$$Y_{ij} = \mu + \alpha_i + \epsilon_{ij}, \quad \sum_{i=1}^{I} n_i \alpha_i = 0, \ \epsilon_{ij} \sim N(0, \sigma^2), \text{ unabhängig}, \quad i = 1, \ldots, I, \ j = 1, \ldots, n_i.$$

Schätzer für Modell 2:

$$\hat{\mu} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{I} \sum_{j=1}^{n_i} Y_{ij} = \bar{Y}_{\bullet\bullet} \quad \text{und} \quad \hat{\alpha}_i = \bar{Y}_{i\bullet} - \bar{Y}_{\bullet\bullet}, \quad \text{mit} \quad \bar{Y}_{i\bullet} = \frac{1}{n_i} \sum_{j=1}^{n_i} Y_{ij}$$

Die Prüfgröße für das Testproblem

$$H_0 : \alpha_1 = \ldots = \alpha_I = 0 \quad \text{gegen} \quad H_1 : \text{mind. zwei } \alpha_i \neq 0$$

ist gegeben als

$$F = \frac{MQE}{MQR} = \frac{\sum_{i=1}^{I} n_i (\bar{Y}_{i\bullet} - \bar{Y}_{\bullet\bullet})^2 / (I-1)}{\sum_{i=1}^{I} \sum_{j=1}^{n_i} (Y_{ij} - \bar{Y}_{i\bullet})^2 / (n-I)},$$

Ablehnungsbereich:

$$C = \{F : F > F_{1-\alpha; I-1, n-I}\}.$$

10.2 Zweifaktorielle Varianzanalyse

Modelle:

Modell 1:

$$Y_{ijk} = \mu_{ij} + \epsilon_{ijk}, \quad \epsilon_{ijk} \sim N(0, \sigma^2), \text{ unabhängig}, \quad i = 1, \ldots, I, \ j = 1, \ldots, J, \ k = 1, \ldots, K.$$

Modell 2:

$$\begin{aligned} Y_{ijk} &= \mu + \alpha_i + \beta_j + (\alpha\beta)_{ij} + \epsilon_{ijk}, \quad \sum_{i=1}^{I} \alpha_i = 0, \ \sum_{j=1}^{J} \beta_j = 0, \ \sum_{i=1}^{I} (\alpha\beta)_{ij} = 0, \ \sum_{j=1}^{J} (\alpha\beta)_{ij} = 0, \\ \epsilon_{ijk} &\sim N(0, \sigma^2), \text{ unabhängig}, \quad i = 1, \ldots, I, \ j = 1, \ldots, J, \ k = 1, \ldots, K. \end{aligned}$$

Schätzer:

Die Schätzer der Parameter in Modell 2 sind gegeben als

$$\begin{aligned}
\hat{\mu} &= \frac{1}{IJK}\sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J}\sum_{k=1}^{K} Y_{ijk} = \bar{Y}_{\bullet\bullet\bullet}, \\
\hat{\alpha}_i &= \bar{Y}_{i\bullet\bullet} - \bar{Y}_{\bullet\bullet\bullet} \quad \text{mit} \quad \bar{Y}_{i\bullet\bullet} = \frac{1}{JK}\sum_{j=1}^{J}\sum_{k=1}^{K} Y_{ijk} \\
\hat{\beta}_j &= \bar{Y}_{\bullet j\bullet} - \bar{Y}_{\bullet\bullet\bullet} \quad \text{mit} \quad \bar{Y}_{\bullet j\bullet} = \frac{1}{IK}\sum_{i=1}^{I}\sum_{k=1}^{K} Y_{ijk} \\
\widehat{(\alpha\beta)}_{ij} &= \bar{Y}_{ij\bullet} - \bar{Y}_{i\bullet\bullet} - \bar{Y}_{\bullet j\bullet} + \bar{Y}_{\bullet\bullet\bullet} \quad \text{mit} \quad \bar{Y}_{ij\bullet} = \frac{1}{K}\sum_{k=1}^{K} Y_{ijk}.
\end{aligned}$$

Prüfgrößen:

Vorliegen von Wechselwirkungen:

$$F_{A\times B} = \frac{MQ(A\times B)}{MQR} = \frac{K\sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J}(\bar{Y}_{ij\bullet} - \bar{Y}_{i\bullet\bullet} - \bar{Y}_{\bullet j\bullet} + \bar{Y}_{\bullet\bullet\bullet})^2/((I-1)(J-1))}{\sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J}\sum_{k=1}^{K}(Y_{ijk} - \bar{Y}_{ij\bullet})^2/(IJ(K-1))}$$

mit Ablehnungsbereich

$$F_{A\times B} > F_{1-\alpha;(I-1)(J-1),IJ(K-1)}.$$

Vorliegen von Haupteffekten bedingt durch Faktor A

$$F_A = \frac{MQA}{MQR} = \frac{KJ\sum_{i=1}^{I}(\bar{Y}_{i\bullet\bullet} - \bar{Y}_{\bullet\bullet\bullet})^2/(I-1)}{\sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J}\sum_{k=1}^{K}(Y_{ijk} - \bar{Y}_{ij\bullet})^2/(IJ(K-1))}$$

mit Ablehnungsbereich

$$F_A > F_{1-\alpha;I-1,IJ(K-1)}.$$

Vorliegen von Haupteffekten bedingt durch Faktor B

$$F_B = \frac{MQB}{MQR} = \frac{KI\sum_{j=1}^{J}(\bar{Y}_{\bullet j\bullet} - \bar{Y}_{\bullet\bullet\bullet})^2/(J-1)}{\sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J}\sum_{k=1}^{K}(Y_{ijk} - \bar{Y}_{ij\bullet})^2/(IJ(K-1))}$$

mit Ablehnungsbereich

$$F_B > F_{1-\alpha;J-1,IJ(K-1)}.$$

11 Zeitreihenanalyse

Einfacher gleitender Durchschnitt:

Gleitender Durchschnitt ungerader Ordnung $p = 2q+1$:

$$\hat{g}_t = \frac{1}{2q+1}\sum_{i=t-q}^{t+q} y_i, \quad t = q+1,\ldots,n-q$$

Gleitender Durchschnitt gerader Ordnung $p = 2q$:

$$\hat{g}_t = \frac{1}{2q}\left[\frac{1}{2}y_{t-q} + \frac{1}{2}y_{t+q} + \sum_{i=t-(q-1)}^{t+(q-1)} y_i\right], \quad t = q+1,\ldots,n-q$$

Globale Trendmodelle:

$g_t = \beta_0 + \beta_1 t$	linearer Trend
$g_t = \beta_0 + \beta_1 t + \beta_2 t^2$	quadratischer Trend
$g_t = \beta_0 + \beta_1 t + \ldots + \beta_q t^q$	polynomialer Trend
$g_t = \beta_0 \beta_1^t$	Exponentialtrend
$g_t = \beta_0 \exp\{\beta_1 t\}$	exponentielles Wachstum
$g_t = \frac{\beta_0}{\beta_1 + \exp\{-\beta_2 t\}}$	logistische Sättigungskurve

Schätzung von Trendfunktionen:

lineare Trendfunktion $\hat{g}_t = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 t$ mit

$$\hat{\beta}_0 = \frac{\sum_{t=1}^{n} g_t \sum_{t=1}^{n} t^2 - \sum_{t=1}^{n} t \sum_{t=1}^{n} g_t \cdot t}{n\sum_{t=1}^{n} t^2 - \left(\sum_{t=1}^{n} t\right)^2} \quad \hat{\beta}_1 = \frac{n\sum_{t=1}^{n} g_t \cdot t - \sum_{t=1}^{n} g_t \sum_{t=1}^{n} t}{n\sum_{t=1}^{n} t^2 - \left(\sum_{t=1}^{n} t\right)^2}$$

Exponentialtrend $\hat{g}_t = \hat{\beta}_0\hat{\beta}_1^t \iff \ln\hat{g}_t = \ln\hat{\beta}_0 + t\cdot\ln\hat{\beta}$ mit

$$\ln\hat{\beta}_0 = \frac{\sum_{t=1}^{n} \ln g_t \sum_{t=1}^{n} t^2 - \sum_{t=1}^{n} t \sum_{t=1}^{n} \ln g_t \cdot t}{n\sum_{t=1}^{n} t^2 - \left(\sum_{t=1}^{n} t\right)^2} \quad \ln\hat{\beta}_1 = \frac{n\sum_{t=1}^{n} \ln g_t \cdot t - \sum_{t=1}^{n} \ln g_t \sum_{t=1}^{n} t}{n\sum_{t=1}^{n} t^2 - \left(\sum_{t=1}^{n} t\right)^2}$$

Periodische Schwankungen:

Additives Trend-Saison-Modell:

$$y_t = g_t + s_t + \epsilon_t, \quad t = 1, \ldots, n$$

Multiplikatives Zeitreihenmodell:

$$y_t = g_t \cdot s_t \cdot \epsilon_t, \quad t = 1, \ldots, n$$

Saisonmodell mit k Unterzeiträumen unter Verwendung von Dummyvariablen:

$$s_t = \alpha_1 s_1(t) + \ldots + \alpha_k s_k(t), \quad s_i(t) = \begin{cases} 1, & \text{wenn } t \text{ zum Unterzeitraum } i \text{ gehört} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Schätzung von $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$:

$$\text{im additiven Modell:} \quad \hat{\alpha}_i = \frac{1}{P} \sum_{t=1}^{n} s_i(t)(y_t - \hat{g}_t),$$

$$\text{im multiplikativen Modell:} \quad \hat{\alpha}_i = \frac{1}{P} \sum_{t=1}^{n} s_i(t) \frac{y_t}{\hat{g}_t}$$

mit $P = n/k$ Anzahl der Perioden.

Prognose zum Zeitpunkt T:

$$\hat{y}_T = \hat{g}_T + \hat{s}_T.$$

12 Verteilungstabellen

12.1 Standardnormalverteilung

Tabelliert sind die Werte der Verteilungsfunktion $\Phi(z) = P(Z \leq z)$ für $z \geq 0$.
Ablesebeispiel: $\Phi(1.75) = 0.9599$
Funktionswerte für negative Argumente: $\Phi(-z) = 1 - \Phi(z)$
Die z-Quantile ergeben sich genau umgekehrt.
Beispielsweise ist $z_{0.9599} = 1.75$ und $z_{0.9750} = 1.96$.

	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998

12.2 Students t-Verteilung

Tabelliert sind die Quantile für n Freiheitsgrade.
Für das Quantil $t_{1-\alpha,n}$ gilt $F(t_{1-\alpha,n}) = 1-\alpha$.
Links vom Quantil $t_{1-\alpha,n}$ liegt die Wahrscheinlichkeitsmasse $1-\alpha$.
Ablesebeispiel: $t_{0.99,20} = 2.528$
Die Quantile für $0 < 1-\alpha < 0.5$ erhält man aus $t_{\alpha,n} = -t_{1-\alpha,n}$

Approximation für $n > 30$:

$$t_{\alpha,n} \approx z_\alpha \quad (z_\alpha \text{ ist das } (\alpha)\text{-Quantil der Standardnormalverteilung})$$

n	0.6	0.8	0.9	0.95	0.975	0.99	0.995	0.999	0.9995
1	0.3249	1.3764	3.0777	6.3138	12.706	31.821	63.657	318.31	636.62
2	0.2887	1.0607	1.8856	2.9200	4.3027	6.9646	9.9248	22.327	31.599
3	0.2767	0.9785	1.6377	2.3534	3.1824	4.5407	5.8409	10.215	12.924
4	0.2707	0.9410	1.5332	2.1318	2.7764	3.7469	4.6041	7.1732	8.6103
5	0.2672	0.9195	1.4759	2.0150	2.5706	3.3649	4.0321	5.8934	6.8688
6	0.2648	0.9057	1.4398	1.9432	2.4469	3.1427	3.7074	5.2076	5.9588
7	0.2632	0.8960	1.4149	1.8946	2.3646	2.9980	3.4995	4.7853	5.4079
8	0.2619	0.8889	1.3968	1.8595	2.3060	2.8965	3.3554	4.5008	5.0413
9	0.2610	0.8834	1.3830	1.8331	2.2622	2.8214	3.2498	4.2968	4.7809
10	0.2602	0.8791	1.3722	1.8125	2.2281	2.7638	3.1693	4.1437	4.5869
11	0.2596	0.8755	1.3634	1.7959	2.2010	2.7181	3.1058	4.0247	4.4370
12	0.2590	0.8726	1.3562	1.7823	2.1788	2.6810	3.0545	3.9296	4.3178
13	0.2586	0.8702	1.3502	1.7709	2.1604	2.6503	3.0123	3.8520	4.2208
14	0.2582	0.8681	1.3450	1.7613	2.1448	2.6245	2.9768	3.7874	4.1405
15	0.2579	0.8662	1.3406	1.7531	2.1314	2.6025	2.9467	3.7328	4.0728
16	0.2576	0.8647	1.3368	1.7459	2.1199	2.5835	2.9208	3.6862	4.0150
17	0.2573	0.8633	1.3334	1.7396	2.1098	2.5669	2.8982	3.6458	3.9651
18	0.2571	0.8620	1.3304	1.7341	2.1009	2.5524	2.8784	3.6105	3.9216
19	0.2569	0.8610	1.3277	1.7291	2.0930	2.5395	2.8609	3.5794	3.8834
20	0.2567	0.8600	1.3253	1.7247	2.0860	2.5280	2.8453	3.5518	3.8495
21	0.2566	0.8591	1.3232	1.7207	2.0796	2.5176	2.8314	3.5272	3.8193
22	0.2564	0.8583	1.3212	1.7171	2.0739	2.5083	2.8188	3.5050	3.7921
23	0.2563	0.8575	1.3195	1.7139	2.0687	2.4999	2.8073	3.4850	3.7676
24	0.2562	0.8569	1.3178	1.7109	2.0639	2.4922	2.7969	3.4668	3.7454
25	0.2561	0.8562	1.3163	1.7081	2.0595	2.4851	2.7874	3.4502	3.7251
26	0.2560	0.8557	1.3150	1.7056	2.0555	2.4786	2.7787	3.4350	3.7066
27	0.2559	0.8551	1.3137	1.7033	2.0518	2.4727	2.7707	3.4210	3.6896
28	0.2558	0.8546	1.3125	1.7011	2.0484	2.4671	2.7633	3.4082	3.6739
29	0.2557	0.8542	1.3114	1.6991	2.0452	2.4620	2.7564	3.3962	3.6594
30	0.2556	0.8538	1.3104	1.6973	2.0423	2.4573	2.7500	3.3852	3.6460
∞	0.2533	0.8416	1.2816	1.6449	1.9600	2.3263	2.5758	3.0903	3.2906

12.3 χ^2-Verteilung

Tabelliert sind die Quantile für n Freiheitsgrade.
Für das Quantil $\chi^2_{1-\alpha,n}$ gilt $F(\chi^2_{1-\alpha,n}) = 1-\alpha$.
Links vom Quantil $\chi^2_{1-\alpha,n}$ liegt die Wahrscheinlichkeitsmasse $1-\alpha$.
Ablesebeispiel: $\chi^2_{0.95,10} = 18.307$

Approximation für $n > 30$:

$$\chi^2_{\alpha,n} \approx \frac{1}{2}(z_\alpha + \sqrt{2n-1})^2 \quad (z_\alpha \text{ ist das } \alpha\text{-Quantil der Standardnormalverteilung})$$

n	0.01	0.025	0.05	0.1	0.5	0.9	0.95	0.975	0.99
1	0.0002	0.0010	0.0039	0.0158	0.4549	2.7055	3.8415	5.0239	6.6349
2	0.0201	0.0506	0.1026	0.2107	1.3863	4.6052	5.9915	7.3778	9.2103
3	0.1148	0.2158	0.3518	0.5844	2.3660	6.2514	7.8147	9.3484	11.345
4	0.2971	0.4844	0.7107	1.0636	3.3567	7.7794	9.4877	11.143	13.277
5	0.5543	0.8312	1.1455	1.6103	4.3515	9.2364	11.070	12.833	15.086
6	0.8721	1.2373	1.6354	2.2041	5.3481	10.645	12.592	14.449	16.812
7	1.2390	1.6899	2.1674	2.8331	6.3458	12.017	14.067	16.013	18.475
8	1.6465	2.1797	2.7326	3.4895	7.3441	13.362	15.507	17.535	20.090
9	2.0879	2.7004	3.3251	4.1682	8.3428	14.684	16.919	19.023	21.666
10	2.5582	3.2470	3.9403	4.8652	9.3418	15.987	18.307	20.483	23.209
11	3.0535	3.8157	4.5748	5.5778	10.341	17.275	19.675	21.920	24.725
12	3.5706	4.4038	5.2260	6.3038	11.340	18.549	21.026	23.337	26.217
13	4.1069	5.0088	5.8919	7.0415	12.340	19.812	22.362	24.736	27.688
14	4.6604	5.6287	6.5706	7.7895	13.339	21.064	23.685	26.119	29.141
15	5.2293	6.2621	7.2609	8.5468	14.339	22.307	24.996	27.488	30.578
16	5.8122	6.9077	7.9616	9.3122	15.338	23.542	26.296	28.845	32.000
17	6.4078	7.5642	8.6718	10.085	16.338	24.769	27.587	30.191	33.409
18	7.0149	8.2307	9.3905	10.865	17.338	25.989	28.869	31.526	34.805
19	7.6327	8.9065	10.117	11.651	18.338	27.204	30.144	32.852	36.191
20	8.2604	9.5908	10.851	12.443	19.337	28.412	31.410	34.170	37.566
21	8.8972	10.283	11.591	13.240	20.337	29.615	32.671	35.479	38.932
22	9.5425	10.982	12.338	14.041	21.337	30.813	33.924	36.781	40.289
23	10.196	11.689	13.091	14.848	22.337	32.007	35.172	38.076	41.638
24	10.856	12.401	13.848	15.659	23.337	33.196	36.415	39.364	42.980
25	11.524	13.120	14.611	16.473	24.337	34.382	37.652	40.646	44.314
26	12.198	13.844	15.379	17.292	25.336	35.563	38.885	41.923	45.642
27	12.879	14.573	16.151	18.114	26.336	36.741	40.113	43.195	46.963
28	13.565	15.308	16.928	18.939	27.336	37.916	41.337	44.461	48.278
29	14.256	16.047	17.708	19.768	28.336	39.087	42.557	45.722	49.588
30	14.953	16.791	18.493	20.599	29.336	40.256	43.773	46.979	50.892

12.4 Poissonverteilung

Tabelliert sind die Werte der Verteilungsfunktion $F(x) = P(X \leq x) = \sum_{k=0}^{x} P(X = k)$.

Ablesebeispiel: $X \sim Po(4)$ $\quad F(5) = P(X \leq 5) = 0.7851$

Approximation für $\boldsymbol{\lambda \geq 10}$:

$$Po(\lambda) \overset{a}{\sim} N(\lambda, \lambda)$$

	λ									
x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0.3679	0.1353	0.0498	0.0183	0.0067	0.0025	0.0009	0.0003	0.0001	0.0000
1	0.7358	0.4060	0.1991	0.0916	0.0404	0.0174	0.0073	0.0030	0.0012	0.0005
2	0.9197	0.6767	0.4232	0.2381	0.1247	0.0620	0.0296	0.0138	0.0062	0.0028
3	0.9810	0.8571	0.6472	0.4335	0.2650	0.1512	0.0818	0.0424	0.0212	0.0103
4	0.9963	0.9473	0.8153	0.6288	0.4405	0.2851	0.1730	0.0996	0.0550	0.0293
5	0.9994	0.9834	0.9161	0.7851	0.6160	0.4457	0.3007	0.1912	0.1157	0.0671
6	0.9999	0.9955	0.9665	0.8893	0.7622	0.6063	0.4497	0.3134	0.2068	0.1301
7	1.0000	0.9989	0.9881	0.9489	0.8666	0.7440	0.5987	0.4530	0.3239	0.2202
8		0.9998	0.9962	0.9786	0.9319	0.8472	0.7291	0.5925	0.4557	0.3328
9		1.0000	0.9989	0.9919	0.9682	0.9161	0.8305	0.7166	0.5874	0.4579
10			0.9997	0.9972	0.9863	0.9574	0.9015	0.8159	0.7060	0.5830
11			0.9999	0.9991	0.9945	0.9799	0.9467	0.8881	0.8030	0.6968
12			1.0000	0.9997	0.9980	0.9912	0.9730	0.9362	0.8758	0.7916
13				0.9999	0.9993	0.9964	0.9872	0.9658	0.9261	0.8645
14				1.0000	0.9998	0.9986	0.9943	0.9827	0.9585	0.9165
15					0.9999	0.9995	0.9976	0.9918	0.9780	0.9513
16					1.0000	0.9998	0.9990	0.9963	0.9889	0.9730
17						0.9999	0.9996	0.9984	0.9947	0.9857
18						1.0000	0.9999	0.9993	0.9976	0.9928
19							1.0000	0.9997	0.9989	0.9965
20								0.9999	0.9996	0.9984
21								1.0000	0.9998	0.9993
22									0.9999	0.9997
23									1.0000	0.9999
24										1.0000

12.5 F-Verteilung

Tabelliert sind die rechtsseitigen Quantile für (n_1, n_2) Freiheitsgrade.

Für das Quantil $f_{1-\alpha;n_1,n_2}$ gilt $F(f_{1-\alpha;n_1,n_2}) = 1 - \alpha$. Links vom Quantil $f_{1-\alpha;n_1,n_2}$ liegt die Wahrscheinlichkeitsmasse $1 - \alpha$.

Ablesebeispiel: $f_{0.99;15,8} = 5.5151$

Linksseitige Quantile: $f_{\alpha;n_1,n_2} = \frac{1}{f_{1-\alpha;n_1,n_2}}$

		n_2								
n_1	α	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	0.9	39.863	8.5263	5.5383	4.5448	4.0604	3.7759	3.5894	3.4579	3.3603
	0.95	161.45	18.513	10.128	7.7086	6.6079	5.9874	5.5914	5.3177	5.1174
	0.975	647.79	38.506	17.443	12.218	10.007	8.8131	8.0727	7.5709	7.2093
	0.99	4052.2	98.502	34.116	21.198	16.258	13.745	12.246	11.259	10.561
2	0.9	49.500	9.0000	5.4624	4.3246	3.7797	3.4633	3.2574	3.1131	3.0065
	0.95	199.50	19.000	9.5521	6.9443	5.7861	5.1433	4.7374	4.4590	4.2565
	0.975	799.50	39.000	16.044	10.649	8.4336	7.2599	6.5415	6.0595	5.7147
	0.99	4999.5	99.000	30.817	18.000	13.274	10.925	9.5466	8.6491	8.0215
3	0.9	53.593	9.1618	5.3908	4.1909	3.6195	3.2888	3.0741	2.9238	2.8129
	0.95	215.71	19.164	9.2766	6.5914	5.4095	4.7571	4.3468	4.0662	3.8625
	0.975	864.16	39.165	15.439	9.9792	7.7636	6.5988	5.8898	5.4160	5.0781
	0.99	5403.4	99.166	29.457	16.694	12.060	9.7795	8.4513	7.5910	6.9919
4	0.9	55.833	9.2434	5.3426	4.1072	3.5202	3.1808	2.9605	2.8064	2.6927
	0.95	224.58	19.247	9.1172	6.3882	5.1922	4.5337	4.1203	3.8379	3.6331
	0.975	899.58	39.248	15.101	9.6045	7.3879	6.2272	5.5226	5.0526	4.7181
	0.99	5624.6	99.249	28.710	15.977	11.392	9.1483	7.8466	7.0061	6.4221
5	0.9	57.240	9.2926	5.3092	4.0506	3.4530	3.1075	2.8833	2.7264	2.6106
	0.95	230.16	19.296	9.0135	6.2561	5.0503	4.3874	3.9715	3.6875	3.4817
	0.975	921.85	39.298	14.885	9.3645	7.1464	5.9876	5.2852	4.8173	4.4844
	0.99	5763.6	99.299	28.237	15.522	10.967	8.7459	7.4604	6.6318	6.0569
6	0.9	58.204	9.3255	5.2847	4.0097	3.4045	3.0546	2.8274	2.6683	2.5509
	0.95	233.99	19.330	8.9406	6.1631	4.9503	4.2839	3.8660	3.5806	3.3738
	0.975	937.11	39.331	14.735	9.1973	6.9777	5.8198	5.1186	4.6517	4.3197
	0.99	5859.0	99.333	27.911	15.207	10.672	8.4661	7.1914	6.3707	5.8018
7	0.9	58.906	9.3491	5.2662	3.9790	3.3679	3.0145	2.7849	2.6241	2.5053
	0.95	236.77	19.353	8.8867	6.0942	4.8759	4.2067	3.7870	3.5005	3.2927
	0.975	948.22	39.355	14.624	9.0741	6.8531	5.6955	4.9949	4.5286	4.1970
	0.99	5928.4	99.356	27.672	14.976	10.456	8.2600	6.9928	6.1776	5.6129
8	0.9	59.439	9.3668	5.2517	3.9549	3.3393	2.9830	2.7516	2.5893	2.4694
	0.95	238.88	19.371	8.8452	6.0410	4.8183	4.1468	3.7257	3.4381	3.2296
	0.975	956.66	39.373	14.540	8.9796	6.7572	5.5996	4.8993	4.4333	4.1020
	0.99	5981.1	99.374	27.489	14.799	10.289	8.1017	6.8400	6.0289	5.4671
9	0.9	59.858	9.3805	5.2400	3.9357	3.3163	2.9577	2.7247	2.5612	2.4403
	0.95	240.54	19.385	8.8123	5.9988	4.7725	4.0990	3.6767	3.3881	3.1789
	0.975	963.28	39.387	14.473	8.9047	6.6811	5.5234	4.8232	4.3572	4.0260
	0.99	6022.5	99.388	27.345	14.659	10.158	7.9761	6.7188	5.9106	5.3511
10	0.9	60.195	9.3916	5.2304	3.9199	3.2974	2.9369	2.7025	2.5380	2.4163
	0.95	241.88	19.396	8.7855	5.9644	4.7351	4.0600	3.6365	3.3472	3.1373
	0.975	968.63	39.398	14.419	8.8439	6.6192	5.4613	4.7611	4.2951	3.9639
	0.99	6055.8	99.399	27.229	14.546	10.051	7.8741	6.6201	5.8143	5.2565
11	0.9	60.473	9.4006	5.2224	3.9067	3.2816	2.9195	2.6839	2.5186	2.3961
	0.95	242.98	19.405	8.7633	5.9358	4.7040	4.0274	3.6030	3.3130	3.1025
	0.975	973.03	39.407	14.374	8.7935	6.5678	5.4098	4.7095	4.2434	3.9121
	0.99	6083.3	99.408	27.133	14.452	9.9626	7.7896	6.5382	5.7343	5.1779
12	0.9	60.705	9.4081	5.2156	3.8955	3.2682	2.9047	2.6681	2.5020	2.3789
	0.95	243.91	19.413	8.7446	5.9117	4.6777	3.9999	3.5747	3.2839	3.0729

n_1	α	n_2 = 1	2	3	4	5	6	7	8	9
	0.975	976.71	39.415	14.337	8.7512	6.5245	5.3662	4.6658	4.1997	3.8682
	0.99	6106.3	99.416	27.052	14.374	9.8883	7.7183	6.4691	5.6667	5.1114
13	0.9	60.903	9.4145	5.2098	3.8859	3.2567	2.8920	2.6545	2.4876	2.3640
	0.95	244.69	19.419	8.7287	5.8911	4.6552	3.9764	3.5503	3.2590	3.0475
	0.975	979.84	39.421	14.304	8.7150	6.4876	5.3290	4.6285	4.1622	3.8306
	0.99	6125.9	99.422	26.983	14.307	9.8248	7.6575	6.4100	5.6089	5.0545
14	0.9	61.073	9.4200	5.2047	3.8776	3.2468	2.8809	2.6426	2.4752	2.3510
	0.95	245.36	19.424	8.7149	5.8733	4.6358	3.9559	3.5292	3.2374	3.0255
	0.975	982.53	39.427	14.277	8.6838	6.4556	5.2968	4.5961	4.1297	3.7980
	0.99	6142.7	99.428	26.924	14.249	9.7700	7.6049	6.3590	5.5589	5.0052
15	0.9	61.220	9.4247	5.2003	3.8704	3.2380	2.8712	2.6322	2.4642	2.3396
	0.95	245.95	19.429	8.7029	5.8578	4.6188	3.9381	3.5107	3.2184	3.0061
	0.975	984.87	39.431	14.253	8.6565	6.4277	5.2687	4.5678	4.1012	3.7694
	0.99	6157.3	99.433	26.872	14.198	9.7222	7.5590	6.3143	5.5151	4.9621
20	0.9	61.740	9.4413	5.1845	3.8443	3.2067	2.8363	2.5947	2.4246	2.2983
	0.95	248.01	19.446	8.6602	5.8025	4.5581	3.8742	3.4445	3.1503	2.9365
	0.975	993.10	39.448	14.167	8.5599	6.3286	5.1684	4.4667	3.9995	3.6669
	0.99	6208.7	99.449	26.690	14.020	9.5526	7.3958	6.1554	5.3591	4.8080
25	0.9	62.055	9.4513	5.1747	3.8283	3.1873	2.8147	2.5714	2.3999	2.2725
	0.95	249.26	19.456	8.6341	5.7687	4.5209	3.8348	3.4036	3.1081	2.8932
	0.975	998.08	39.458	14.115	8.5010	6.2679	5.1069	4.4045	3.9367	3.6035
	0.99	6239.8	99.459	26.579	13.911	9.4491	7.2960	6.0580	5.2631	4.7130
30	0.9	62.265	9.4579	5.1681	3.8174	3.1741	2.8000	2.5555	2.3830	2.2547
	0.95	250.10	19.462	8.6166	5.7459	4.4957	3.8082	3.3758	3.0794	2.8637
	0.975	1001.4	39.465	14.081	8.4613	6.2269	5.0652	4.3624	3.8940	3.5604
	0.99	6260.6	99.466	26.505	13.838	9.3793	7.2285	5.9920	5.1981	4.6486
40	0.9	62.529	9.4662	5.1597	3.8036	3.1573	2.7812	2.5351	2.3614	2.2320
	0.95	251.14	19.471	8.5944	5.7170	4.4638	3.7743	3.3404	3.0428	2.8259
	0.975	1005.6	39.473	14.037	8.4111	6.1750	5.0125	4.3089	3.8398	3.5055
	0.99	6286.8	99.474	26.411	13.745	9.2912	7.1432	5.9084	5.1156	4.5666
50	0.9	62.688	9.4712	5.1546	3.7952	3.1471	2.7697	2.5226	2.3481	2.2180
	0.95	251.77	19.476	8.5810	5.6995	4.4444	3.7537	3.3189	3.0204	2.8028
	0.975	1008.1	39.478	14.010	8.3808	6.1436	4.9804	4.2763	3.8067	3.4719
	0.99	6302.5	99.479	26.354	13.690	9.2378	7.0915	5.8577	5.0654	4.5167
60	0.9	62.794	9.4746	5.1512	3.7896	3.1402	2.7620	2.5142	2.3391	2.2085
	0.95	252.20	19.479	8.5720	5.6877	4.4314	3.7398	3.3043	3.0053	2.7872
	0.975	1009.8	39.481	13.992	8.3604	6.1225	4.9589	4.2544	3.7844	3.4493
	0.99	6313.0	99.482	26.316	13.652	9.2020	7.0567	5.8236	5.0316	4.4831
80	0.9	62.927	9.4787	5.1469	3.7825	3.1316	2.7522	2.5036	2.3277	2.1965
	0.95	252.72	19.483	8.5607	5.6730	4.4150	3.7223	3.2860	2.9862	2.7675
	0.975	1011.9	39.485	13.970	8.3349	6.0960	4.9318	4.2268	3.7563	3.4207
	0.99	6326.2	99.487	26.269	13.605	9.1570	7.0130	5.7806	4.9890	4.4407
100	0.9	63.007	9.4812	5.1443	3.7782	3.1263	2.7463	2.4971	2.3208	2.1892
	0.95	253.04	19.486	8.5539	5.6641	4.4051	3.7117	3.2749	2.9747	2.7556
	0.975	1013.2	39.488	13.956	8.3195	6.0800	4.9154	4.2101	3.7393	3.4034
	0.99	6334.1	99.489	26.240	13.577	9.1299	6.9867	5.7547	4.9633	4.4150
150	0.9	63.114	9.4846	5.1408	3.7724	3.1193	2.7383	2.4884	2.3115	2.1793
	0.95	253.46	19.489	8.5448	5.6521	4.3918	3.6976	3.2600	2.9591	2.7394
	0.975	1014.9	39.491	13.938	8.2988	6.0586	4.8934	4.1877	3.7165	3.3801
	0.99	6344.7	99.492	26.202	13.539	9.0936	6.9513	5.7199	4.9287	4.3805

n_1	α	n_2 = 10	12	14	16	18	20	22	24	26
1	0.9	3.2850	3.1765	3.1022	3.0481	3.0070	2.9747	2.9486	2.9271	2.9091
	0.95	4.9646	4.7472	4.6001	4.4940	4.4139	4.3512	4.3009	4.2597	4.2252
	0.975	6.9367	6.5538	6.2979	6.1151	5.9781	5.8715	5.7863	5.7166	5.6586
	0.99	10.044	9.3302	8.8616	8.5310	8.2854	8.0960	7.9454	7.8229	7.7213
2	0.9	2.9245	2.8068	2.7265	2.6682	2.6239	2.5893	2.5613	2.5383	2.5191
	0.95	4.1028	3.8853	3.7389	3.6337	3.5546	3.4928	3.4434	3.4028	3.3690
	0.975	5.4564	5.0959	4.8567	4.6867	4.5597	4.4613	4.3828	4.3187	4.2655
	0.99	7.5594	6.9266	6.5149	6.2262	6.0129	5.8489	5.7190	5.6136	5.5263
3	0.9	2.7277	2.6055	2.5222	2.4618	2.4160	2.3801	2.3512	2.3274	2.3075
	0.95	3.7083	3.4903	3.3439	3.2389	3.1599	3.0984	3.0491	3.0088	2.9752
	0.975	4.8256	4.4742	4.2417	4.0768	3.9539	3.8587	3.7829	3.7211	3.6697
	0.99	6.5523	5.9525	5.5639	5.2922	5.0919	4.9382	4.8166	4.7181	4.6366
4	0.9	2.6053	2.4801	2.3947	2.3327	2.2858	2.2489	2.2193	2.1949	2.1745
	0.95	3.4780	3.2592	3.1122	3.0069	2.9277	2.8661	2.8167	2.7763	2.7426
	0.975	4.4683	4.1212	3.8919	3.7294	3.6083	3.5147	3.4401	3.3794	3.3289
	0.99	5.9943	5.4120	5.0354	4.7726	4.5790	4.4307	4.3134	4.2184	4.1400
5	0.9	2.5216	2.3940	2.3069	2.2438	2.1958	2.1582	2.1279	2.1030	2.0822
	0.95	3.3258	3.1059	2.9582	2.8524	2.7729	2.7109	2.6613	2.6207	2.5868
	0.975	4.2361	3.8911	3.6634	3.5021	3.3820	3.2891	3.2151	3.1548	3.1048
	0.99	5.6363	5.0643	4.6950	4.4374	4.2479	4.1027	3.9880	3.8951	3.8183
6	0.9	2.4606	2.3310	2.2426	2.1783	2.1296	2.0913	2.0605	2.0351	2.0139
	0.95	3.2172	2.9961	2.8477	2.7413	2.6613	2.5990	2.5491	2.5082	2.4741
	0.975	4.0721	3.7283	3.5014	3.3406	3.2209	3.1283	3.0546	2.9946	2.9447
	0.99	5.3858	4.8206	4.4558	4.2016	4.0146	3.8714	3.7583	3.6667	3.5911
7	0.9	2.4140	2.2828	2.1931	2.1280	2.0785	2.0397	2.0084	1.9826	1.9610
	0.95	3.1355	2.9134	2.7642	2.6572	2.5767	2.5140	2.4638	2.4226	2.3883
	0.975	3.9498	3.6065	3.3799	3.2194	3.0999	3.0074	2.9338	2.8738	2.8240
	0.99	5.2001	4.6395	4.2779	4.0259	3.8406	3.6987	3.5867	3.4959	3.4210
8	0.9	2.3771	2.2446	2.1539	2.0880	2.0379	1.9985	1.9668	1.9407	1.9188
	0.95	3.0717	2.8486	2.6987	2.5911	2.5102	2.4471	2.3965	2.3551	2.3205
	0.975	3.8549	3.5118	3.2853	3.1248	3.0053	2.9128	2.8392	2.7791	2.7293
	0.99	5.0567	4.4994	4.1399	3.8896	3.7054	3.5644	3.4530	3.3629	3.2884
9	0.9	2.3473	2.2135	2.1220	2.0553	2.0047	1.9649	1.9327	1.9063	1.8841
	0.95	3.0204	2.7964	2.6458	2.5377	2.4563	2.3928	2.3419	2.3002	2.2655
	0.975	3.7790	3.4358	3.2093	3.0488	2.9291	2.8365	2.7628	2.7027	2.6528
	0.99	4.9424	4.3875	4.0297	3.7804	3.5971	3.4567	3.3458	3.2560	3.1818
10	0.9	2.3226	2.1878	2.0954	2.0281	1.9770	1.9367	1.9043	1.8775	1.8550
	0.95	2.9782	2.7534	2.6022	2.4935	2.4117	2.3479	2.2967	2.2547	2.2197
	0.975	3.7168	3.3736	3.1469	2.9862	2.8664	2.7737	2.6998	2.6396	2.5896
	0.99	4.8491	4.2961	3.9394	3.6909	3.5082	3.3682	3.2576	3.1681	3.0941
11	0.9	2.3018	2.1660	2.0729	2.0051	1.9535	1.9129	1.8801	1.8530	1.8303
	0.95	2.9430	2.7173	2.5655	2.4564	2.3742	2.3100	2.2585	2.2163	2.1811
	0.975	3.6649	3.3215	3.0946	2.9337	2.8137	2.7209	2.6469	2.5865	2.5363
	0.99	4.7715	4.2198	3.8640	3.6162	3.4338	3.2941	3.1837	3.0944	3.0205
12	0.9	2.2841	2.1474	2.0537	1.9854	1.9333	1.8924	1.8593	1.8319	1.8090
	0.95	2.9130	2.6866	2.5342	2.4247	2.3421	2.2776	2.2258	2.1834	2.1479
	0.975	3.6209	3.2773	3.0502	2.8890	2.7689	2.6758	2.6017	2.5411	2.4908
	0.99	4.7059	4.1553	3.8001	3.5527	3.3706	3.2311	3.1209	3.0316	2.9578
13	0.9	2.2687	2.1313	2.0370	1.9682	1.9158	1.8745	1.8411	1.8136	1.7904
	0.95	2.8872	2.6602	2.5073	2.3973	2.3143	2.2495	2.1975	2.1548	2.1192
	0.975	3.5832	3.2393	3.0119	2.8506	2.7302	2.6369	2.5626	2.5019	2.4515
	0.99	4.6496	4.0999	3.7452	3.4981	3.3162	3.1769	3.0667	2.9775	2.9038
14	0.9	2.2553	2.1173	2.0224	1.9532	1.9004	1.8588	1.8252	1.7974	1.7741
	0.95	2.8647	2.6371	2.4837	2.3733	2.2900	2.2250	2.1727	2.1298	2.0939
	0.975	3.5504	3.2062	2.9786	2.8170	2.6964	2.6030	2.5285	2.4677	2.4171

n_1	α	10	12	14	16	18	20	22	24	26
						n_2				
	0.99	4.6008	4.0518	3.6975	3.4506	3.2689	3.1296	3.0195	2.9303	2.8566
15	0.9	2.2435	2.1049	2.0095	1.9399	1.8868	1.8449	1.8111	1.7831	1.7596
	0.95	2.8450	2.6169	2.4630	2.3522	2.2686	2.2033	2.1508	2.1077	2.0716
	0.975	3.5217	3.1772	2.9493	2.7875	2.6667	2.5731	2.4984	2.4374	2.3867
	0.99	4.5581	4.0096	3.6557	3.4089	3.2273	3.0880	2.9779	2.8887	2.8150
20	0.9	2.2007	2.0597	1.9625	1.8913	1.8368	1.7938	1.7590	1.7302	1.7059
	0.95	2.7740	2.5436	2.3879	2.2756	2.1906	2.1242	2.0707	2.0267	1.9898
	0.975	3.4185	3.0728	2.8437	2.6808	2.5590	2.4645	2.3890	2.3273	2.2759
	0.99	4.4054	3.8584	3.5052	3.2587	3.0771	2.9377	2.8274	2.7380	2.6640
25	0.9	2.1739	2.0312	1.9326	1.8603	1.8049	1.7611	1.7255	1.6960	1.6712
	0.95	2.7298	2.4977	2.3407	2.2272	2.1413	2.0739	2.0196	1.9750	1.9375
	0.975	3.3546	3.0077	2.7777	2.6138	2.4912	2.3959	2.3198	2.2574	2.2054
	0.99	4.3111	3.7647	3.4116	3.1650	2.9831	2.8434	2.7328	2.6430	2.5686
30	0.9	2.1554	2.0115	1.9119	1.8388	1.7827	1.7382	1.7021	1.6721	1.6468
	0.95	2.6996	2.4663	2.3082	2.1938	2.1071	2.0391	1.9842	1.9390	1.9010
	0.975	3.3110	2.9633	2.7324	2.5678	2.4445	2.3486	2.2718	2.2090	2.1565
	0.99	4.2469	3.7008	3.3476	3.1007	2.9185	2.7785	2.6675	2.5773	2.5026
40	0.9	2.1317	1.9861	1.8852	1.8108	1.7537	1.7083	1.6714	1.6407	1.6147
	0.95	2.6609	2.4259	2.2663	2.1507	2.0629	1.9938	1.9380	1.8920	1.8533
	0.975	3.2554	2.9063	2.6742	2.5085	2.3842	2.2873	2.2097	2.1460	2.0928
	0.99	4.1653	3.6192	3.2656	3.0182	2.8354	2.6947	2.5831	2.4923	2.4170
50	0.9	2.1171	1.9704	1.8686	1.7934	1.7356	1.6896	1.6521	1.6209	1.5945
	0.95	2.6371	2.4010	2.2405	2.1240	2.0354	1.9656	1.9092	1.8625	1.8233
	0.975	3.2214	2.8714	2.6384	2.4719	2.3468	2.2493	2.1710	2.1067	2.0530
	0.99	4.1155	3.5692	3.2153	2.9675	2.7841	2.6430	2.5308	2.4395	2.3637
60	0.9	2.1072	1.9597	1.8572	1.7816	1.7232	1.6768	1.6389	1.6073	1.5805
	0.95	2.6211	2.3842	2.2229	2.1058	2.0166	1.9464	1.8894	1.8424	1.8027
	0.975	3.1984	2.8478	2.6142	2.4471	2.3214	2.2234	2.1446	2.0799	2.0257
	0.99	4.0819	3.5355	3.1813	2.9330	2.7493	2.6077	2.4951	2.4035	2.3273
80	0.9	2.0946	1.9461	1.8428	1.7664	1.7073	1.6603	1.6218	1.5897	1.5625
	0.95	2.6008	2.3628	2.2006	2.0826	1.9927	1.9217	1.8641	1.8164	1.7762
	0.975	3.1694	2.8178	2.5833	2.4154	2.2890	2.1902	2.1108	2.0454	1.9907
	0.99	4.0394	3.4928	3.1381	2.8893	2.7050	2.5628	2.4496	2.3573	2.2806
100	0.9	2.0869	1.9379	1.8340	1.7570	1.6976	1.6501	1.6113	1.5788	1.5513
	0.95	2.5884	2.3498	2.1870	2.0685	1.9780	1.9066	1.8486	1.8005	1.7599
	0.975	3.1517	2.7996	2.5646	2.3961	2.2692	2.1699	2.0901	2.0243	1.9691
	0.99	4.0137	3.4668	3.1118	2.8627	2.6779	2.5353	2.4217	2.3291	2.2519
150	0.9	2.0766	1.9266	1.8220	1.7444	1.6843	1.6363	1.5969	1.5640	1.5360
	0.95	2.5718	2.3322	2.1686	2.0492	1.9581	1.8860	1.8273	1.7787	1.7375
	0.975	3.1280	2.7750	2.5392	2.3700	2.2423	2.1424	2.0618	1.9954	1.9397
	0.99	3.9792	3.4319	3.0764	2.8267	2.6413	2.4981	2.3839	2.2906	2.2129

n_1	α	30	40	50	60	70	80	90	100	110
						n_2				
1	0.9	2.8807	2.8354	2.8087	2.7911	2.7786	2.7693	2.7621	2.7564	2.7517
	0.95	4.1709	4.0847	4.0343	4.0012	3.9778	3.9604	3.9469	3.9361	3.9274
	0.975	5.5675	5.4239	5.3403	5.2856	5.2470	5.2184	5.1962	5.1786	5.1642
	0.99	7.5625	7.3141	7.1706	7.0771	7.0114	6.9627	6.9251	6.8953	6.8710
2	0.9	2.4887	2.4404	2.4120	2.3933	2.3800	2.3701	2.3625	2.3564	2.3515
	0.95	3.3158	3.2317	3.1826	3.1504	3.1277	3.1108	3.0977	3.0873	3.0788
	0.975	4.1821	4.0510	3.9749	3.9253	3.8903	3.8643	3.8443	3.8284	3.8154
	0.99	5.3903	5.1785	5.0566	4.9774	4.9219	4.8807	4.8491	4.8239	4.8035
3	0.9	2.2761	2.2261	2.1967	2.1774	2.1637	2.1535	2.1457	2.1394	2.1343
	0.95	2.9223	2.8387	2.7900	2.7581	2.7355	2.7188	2.7058	2.6955	2.6871
	0.975	3.5894	3.4633	3.3902	3.3425	3.3090	3.2841	3.2649	3.2496	3.2372

n_1	α	30	40	50	60	70	80	90	100	110
						n_2				
	0.99	4.5097	4.3126	4.1993	4.1259	4.0744	4.0363	4.0070	3.9837	3.9648
4	0.9	2.1422	2.0909	2.0608	2.0410	2.0269	2.0165	2.0084	2.0019	1.9967
	0.95	2.6896	2.6060	2.5572	2.5252	2.5027	2.4859	2.4729	2.4626	2.4542
	0.975	3.2499	3.1261	3.0544	3.0077	2.9748	2.9504	2.9315	2.9166	2.9044
	0.99	4.0179	3.8283	3.7195	3.6490	3.5996	3.5631	3.5350	3.5127	3.4946
5	0.9	2.0492	1.9968	1.9660	1.9457	1.9313	1.9206	1.9123	1.9057	1.9004
	0.95	2.5336	2.4495	2.4004	2.3683	2.3456	2.3287	2.3157	2.3053	2.2969
	0.975	3.0265	2.9037	2.8327	2.7863	2.7537	2.7295	2.7109	2.6961	2.6840
	0.99	3.6990	3.5138	3.4077	3.3389	3.2907	3.2550	3.2276	3.2059	3.1882
6	0.9	1.9803	1.9269	1.8954	1.8747	1.8600	1.8491	1.8406	1.8339	1.8284
	0.95	2.4205	2.3359	2.2864	2.2541	2.2312	2.2142	2.2011	2.1906	2.1821
	0.975	2.8667	2.7444	2.6736	2.6274	2.5949	2.5708	2.5522	2.5374	2.5254
	0.99	3.4735	3.2910	3.1864	3.1187	3.0712	3.0361	3.0091	2.9877	2.9703
7	0.9	1.9269	1.8725	1.8405	1.8194	1.8044	1.7933	1.7846	1.7778	1.7721
	0.95	2.3343	2.2490	2.1992	2.1665	2.1435	2.1263	2.1131	2.1025	2.0939
	0.975	2.7460	2.6238	2.5530	2.5068	2.4743	2.4502	2.4316	2.4168	2.4048
	0.99	3.3045	3.1238	3.0202	2.9530	2.9060	2.8713	2.8445	2.8233	2.8061
8	0.9	1.8841	1.8289	1.7963	1.7748	1.7596	1.7483	1.7395	1.7324	1.7267
	0.95	2.2662	2.1802	2.1299	2.0970	2.0737	2.0564	2.0430	2.0323	2.0236
	0.975	2.6513	2.5289	2.4579	2.4117	2.3791	2.3549	2.3363	2.3215	2.3094
	0.99	3.1726	2.9930	2.8900	2.8233	2.7765	2.7420	2.7154	2.6943	2.6771
9	0.9	1.8490	1.7929	1.7598	1.7380	1.7225	1.7110	1.7021	1.6949	1.6891
	0.95	2.2107	2.1240	2.0734	2.0401	2.0166	1.9991	1.9856	1.9748	1.9661
	0.975	2.5746	2.4519	2.3808	2.3344	2.3017	2.2775	2.2588	2.2439	2.2318
	0.99	3.0665	2.8876	2.7850	2.7185	2.6719	2.6374	2.6109	2.5898	2.5727
10	0.9	1.8195	1.7627	1.7291	1.7070	1.6913	1.6796	1.6705	1.6632	1.6573
	0.95	2.1646	2.0772	2.0261	1.9926	1.9689	1.9512	1.9376	1.9267	1.9178
	0.975	2.5112	2.3882	2.3168	2.2702	2.2374	2.2130	2.1942	2.1793	2.1671
	0.99	2.9791	2.8005	2.6981	2.6318	2.5852	2.5508	2.5243	2.5033	2.4862
11	0.9	1.7944	1.7369	1.7029	1.6805	1.6645	1.6526	1.6434	1.6360	1.6300
	0.95	2.1256	2.0376	1.9861	1.9522	1.9283	1.9105	1.8967	1.8857	1.8767
	0.975	2.4577	2.3343	2.2627	2.2159	2.1829	2.1584	2.1395	2.1245	2.1123
	0.99	2.9057	2.7274	2.6250	2.5587	2.5122	2.4777	2.4513	2.4302	2.4132
12	0.9	1.7727	1.7146	1.6802	1.6574	1.6413	1.6292	1.6199	1.6124	1.6063
	0.95	2.0921	2.0035	1.9515	1.9174	1.8932	1.8753	1.8613	1.8503	1.8412
	0.975	2.4120	2.2882	2.2162	2.1692	2.1361	2.1115	2.0925	2.0773	2.0650
	0.99	2.8431	2.6648	2.5625	2.4961	2.4496	2.4151	2.3886	2.3676	2.3505
13	0.9	1.7538	1.6950	1.6602	1.6372	1.6209	1.6086	1.5992	1.5916	1.5854
	0.95	2.0630	1.9738	1.9214	1.8870	1.8627	1.8445	1.8305	1.8193	1.8101
	0.975	2.3724	2.2481	2.1758	2.1286	2.0953	2.0706	2.0515	2.0363	2.0239
	0.99	2.7890	2.6107	2.5083	2.4419	2.3953	2.3608	2.3342	2.3132	2.2960
14	0.9	1.7371	1.6778	1.6426	1.6193	1.6028	1.5904	1.5808	1.5731	1.5669
	0.95	2.0374	1.9476	1.8949	1.8602	1.8357	1.8174	1.8032	1.7919	1.7827
	0.975	2.3378	2.2130	2.1404	2.0929	2.0595	2.0346	2.0154	2.0001	1.9876
	0.99	2.7418	2.5634	2.4609	2.3943	2.3477	2.3131	2.2865	2.2654	2.2482
15	0.9	1.7223	1.6624	1.6269	1.6034	1.5866	1.5741	1.5644	1.5566	1.5503
	0.95	2.0148	1.9245	1.8714	1.8364	1.8117	1.7932	1.7789	1.7675	1.7582
	0.975	2.3072	2.1819	2.1090	2.0613	2.0277	2.0026	1.9833	1.9679	1.9554
	0.99	2.7002	2.5216	2.4190	2.3523	2.3055	2.2709	2.2442	2.2230	2.2058
20	0.9	1.6673	1.6052	1.5681	1.5435	1.5259	1.5128	1.5025	1.4943	1.4877
	0.95	1.9317	1.8389	1.7841	1.7480	1.7223	1.7032	1.6883	1.6764	1.6667
	0.975	2.1952	2.0677	1.9933	1.9445	1.9100	1.8843	1.8644	1.8486	1.8356
	0.99	2.5487	2.3689	2.2652	2.1978	2.1504	2.1153	2.0882	2.0666	2.0491
25	0.9	1.6316	1.5677	1.5294	1.5039	1.4857	1.4720	1.4613	1.4528	1.4458
	0.95	1.8782	1.7835	1.7273	1.6902	1.6638	1.6440	1.6286	1.6163	1.6063
	0.975	2.1237	1.9943	1.9186	1.8687	1.8334	1.8071	1.7867	1.7705	1.7572

n_1	α	n_2 30	40	50	60	70	80	90	100	110
	0.99	2.4526	2.2714	2.1667	2.0984	2.0503	2.0146	1.9871	1.9652	1.9473
30	0.9	1.6065	1.5411	1.5018	1.4755	1.4567	1.4426	1.4315	1.4227	1.4154
	0.95	1.8409	1.7444	1.6872	1.6491	1.6220	1.6017	1.5859	1.5733	1.5630
	0.975	2.0739	1.9429	1.8659	1.8152	1.7792	1.7523	1.7315	1.7148	1.7013
	0.99	2.3860	2.2034	2.0976	2.0285	1.9797	1.9435	1.9155	1.8933	1.8751
40	0.9	1.5732	1.5056	1.4648	1.4373	1.4176	1.4027	1.3911	1.3817	1.3740
	0.95	1.7918	1.6928	1.6337	1.5943	1.5661	1.5449	1.5284	1.5151	1.5043
	0.975	2.0089	1.8752	1.7963	1.7440	1.7069	1.6790	1.6574	1.6401	1.6259
	0.99	2.2992	2.1142	2.0066	1.9360	1.8861	1.8489	1.8201	1.7972	1.7784
50	0.9	1.5522	1.4830	1.4409	1.4126	1.3922	1.3767	1.3646	1.3548	1.3468
	0.95	1.7609	1.6600	1.5995	1.5590	1.5300	1.5081	1.4910	1.4772	1.4660
	0.975	1.9681	1.8324	1.7520	1.6985	1.6604	1.6318	1.6095	1.5917	1.5771
	0.99	2.2450	2.0581	1.9490	1.8772	1.8263	1.7883	1.7588	1.7353	1.7160
60	0.9	1.5376	1.4672	1.4242	1.3952	1.3742	1.3583	1.3457	1.3356	1.3273
	0.95	1.7396	1.6373	1.5757	1.5343	1.5046	1.4821	1.4645	1.4504	1.4388
	0.975	1.9400	1.8028	1.7211	1.6668	1.6279	1.5987	1.5758	1.5575	1.5425
	0.99	2.2079	2.0194	1.9090	1.8363	1.7846	1.7459	1.7158	1.6918	1.6721
80	0.9	1.5187	1.4465	1.4023	1.3722	1.3503	1.3337	1.3206	1.3100	1.3012
	0.95	1.7121	1.6077	1.5445	1.5019	1.4711	1.4477	1.4294	1.4146	1.4024
	0.975	1.9039	1.7644	1.6810	1.6252	1.5851	1.5549	1.5312	1.5122	1.4965
	0.99	2.1601	1.9694	1.8571	1.7828	1.7298	1.6901	1.6591	1.6342	1.6139
100	0.9	1.5069	1.4336	1.3885	1.3576	1.3352	1.3180	1.3044	1.2934	1.2843
	0.95	1.6950	1.5892	1.5249	1.4814	1.4498	1.4259	1.4070	1.3917	1.3791
	0.975	1.8816	1.7405	1.6558	1.5990	1.5581	1.5271	1.5028	1.4833	1.4671
	0.99	2.1307	1.9383	1.8248	1.7493	1.6954	1.6548	1.6231	1.5977	1.5767
150	0.9	1.4907	1.4157	1.3691	1.3372	1.3137	1.2957	1.2814	1.2698	1.2601
	0.95	1.6717	1.5637	1.4977	1.4527	1.4200	1.3949	1.3751	1.3591	1.3457
	0.975	1.8510	1.7076	1.6210	1.5625	1.5202	1.4880	1.4627	1.4422	1.4252
	0.99	2.0905	1.8956	1.7799	1.7027	1.6472	1.6053	1.5724	1.5459	1.5240

12.6 Wilcoxon-Vorzeichen-Rang-Test

Tabelliert sind die kritischen Werte $w^+_{\alpha,n}$. Ablesebeispiel: $w^+_{0.95,12} = 59$

$n\backslash\alpha$	0.01	0.025	0.05	0.10	0.90	0.95	0.975	0.99
4	0	0	0	1	8	9	10	10
5	0	0	1	3	11	13	14	14
6	0	1	3	4	16	17	19	20
7	1	3	4	6	21	23	24	26
8	2	4	6	9	26	29	31	33
9	4	6	9	11	33	35	38	40
10	6	9	11	15	39	43	45	57
11	8	11	14	18	47	51	54	57
12	10	14	18	22	55	59	62	66
13	13	18	22	27	63	68	72	77
14	16	22	26	32	72	78	82	88
15	20	26	31	37	82	88	93	99
16	24	30	36	43	92	99	105	111
17	28	35	42	49	103	110	117	124
18	33	41	48	56	114	122	129	137
19	38	47	54	63	126	135	142	151
20	44	53	61	70	139	148	156	165

12.7 Wilcoxon-Rangsummen-Test

Tabelliert sind die kritischen Werte w_α für $\alpha = 0.05$ (1. Zeile) und $\alpha = 0.10$ (2. Zeile).
Ablesebeispiel: Für $n = 3$ und $m = 7$ ist $w_{0.10} = 11$.
Es ist $w_{1-\alpha;n,m} = n(n+m+1) - w_{\alpha;n,m}$

$n\backslash m$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
2	3	3	3	4	4	4	5	5	5	5	6	6	7	7	7	7	8	8	8
	3	4	4	5	5	5	6	6	7	7	8	8	8	9	9	10	10	11	11
3	6	7	7	8	9	9	10	11	11	12	12	13	14	14	15	16	16	17	18
	7	8	8	9	10	11	12	12	13	14	15	16	17	17	18	19	20	21	22
4	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	25	26	27	28	29
	11	12	14	15	16	17	18	20	21	22	23	24	26	27	28	29	31	32	33
5	16	17	18	20	21	22	24	25	27	28	29	31	32	34	35	36	38	39	41
	17	18	20	21	23	24	26	28	29	31	33	34	36	38	39	41	43	44	46
6	22	24	25	27	29	30	32	34	36	38	39	41	43	45	47	48	50	52	54
	23	25	27	29	31	33	35	37	39	41	43	45	47	49	51	53	56	58	60
7	29	31	33	35	37	40	42	44	46	48	50	53	55	57	59	62	64	66	68
	30	33	35	37	40	42	45	47	50	52	55	57	60	62	65	67	70	72	75
8	38	40	42	45	47	50	52	55	57	60	63	65	68	70	73	76	78	81	84
	39	42	44	47	50	53	56	59	61	64	67	70	73	76	79	82	85	88	91
9	47	50	52	55	58	61	64	67	70	73	76	79	82	85	88	91	94	97	100
	48	51	55	58	61	64	68	71	74	77	81	84	87	91	94	98	101	104	108
10	57	60	63	67	70	73	76	80	83	87	90	93	97	100	104	107	111	114	118
	59	62	66	69	73	77	80	84	88	92	95	99	103	107	110	114	118	122	126
11	68	72	75	79	83	86	90	94	98	101	105	109	113	117	121	124	128	132	136
	70	74	78	82	86	90	94	98	103	107	111	115	119	124	128	132	136	140	145
12	81	84	88	92	96	100	105	109	113	117	121	126	130	134	139	143	147	151	156
	83	87	91	96	100	105	109	114	118	123	128	132	137	142	146	151	156	160	165
13	94	98	102	107	111	116	120	125	129	134	139	143	148	153	157	162	167	172	176
	96	101	105	110	115	120	125	130	135	140	145	150	155	160	166	171	176	181	186
14	109	113	117	122	127	132	137	142	147	152	157	162	167	172	177	183	188	193	198
	110	116	121	126	131	137	142	147	153	158	164	169	175	180	186	191	197	203	208
15	124	128	133	139	144	149	154	160	165	171	176	182	187	193	198	204	209	215	221
	126	131	137	143	148	154	160	166	172	178	184	189	195	201	207	213	219	225	231
16	140	145	151	156	162	167	173	179	185	191	197	202	208	214	220	226	232	238	244
	142	148	154	160	166	173	179	185	191	198	204	211	217	223	230	236	243	249	256
17	157	163	169	174	180	187	193	199	205	211	218	224	231	237	243	250	256	263	269
	160	166	172	179	185	192	199	206	212	219	226	233	239	246	253	260	267	274	281
18	176	181	188	194	200	207	213	220	227	233	240	247	254	260	267	274	281	288	295
	178	185	192	199	206	213	220	227	234	241	249	256	263	270	278	285	292	300	307
19	195	201	208	214	221	228	235	242	249	256	263	271	278	285	292	300	307	314	321
	198	205	212	219	227	234	242	249	257	264	272	280	288	295	303	311	319	326	334
20	215	222	229	236	243	250	258	265	273	280	288	295	303	311	318	326	334	341	349
	218	226	233	241	249	257	265	273	281	287	297	305	313	321	330	338	346	354	362