1 Wahrscheinlichkeitsrechnung

zugehörige Seiten in Fahrmeir et al. (2007): Kap. 4.1 - 4.3

Aufgabe 1

Geben Sie den Ergebnisraum Ω für folgende Zufallsexperimente an

- (a) viermaliger Münzwurf,
- (b) Anzahl von Insekten befallener Blätter einer Pflanze,
- (c) Lebensdauer (in Stunden) von Glühlampen einer bestimmten Marke,
- (d) das Gewicht von 10 Tage alten Rattenbabys,
- (e) Anteil beschädigter elektronischer Bauteile in einer Lieferung.

Aufgabe 2

Zeigen Sie die Gültigkeit folgender Relationen

- (a) $A \setminus B = A \setminus (A \cap B) = A \cap B^c$,
- (b) $B = (B \cap A) \cup (B \cap A^c)$,
- (c) $A \cup B = A \cup (B \cap A^c)$,
- (d) $(\bigcup_{i=1}^n A_i)^c = \bigcap_{i=1}^n A_i^c$ und $(\bigcap_{i=1}^n A_i)^c = \bigcup_{i=1}^n A_i^c$.

Aufgabe 3

Ein Würfel wird so lange geworfen, bis eine Sechs erscheint. Wie lässt sich der Ergebnisraum dieses Experimentes beschreiben? Sei A_n das Ereignis, dass das Experiment nach genau n Würfeln beendet wird. Welche Elemente des Ergebnisraumes enthält A_n ? Wie lässt sich das Ereignis $(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i)^c$ interpretieren?

Aufgabe 4

Sei Ω ein Ergebnisraum. Zeigen Sie, dass für $A, B \subset \Omega$ gilt:

- (a) $P(A^c) = 1 - P(A)$,
- (b) $P(A \cap B) = P(A) - P(A \cap B^c)$,
- (c) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Aufgabe 5

Als Laplace-Experiment bezeichnet man einen zufälligen Versuch mit endlich vielen Ausgängen, die alle die gleiche Wahrscheinlichkeit besitzen.

Zeigen Sie, dass bei einem Laplace-Experiment für jede Teilmenge A des Ergebnisraumes Ω gilt

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|},$$

mit $|A|$ der Mächtigkeit von A (Für eine endliche Menge A gilt $|A| = \#\{\omega : \omega \in A\} = \sum_{\omega} 1_{\{\omega \in A\}}$).

Aufgabe 6

Bei einer Multiple-Choice-Klausur sind 6 Fragen jeweils 4 Antwortmöglichkeiten beigegeben, wovon jeweils nur eine richtig ist. Die Klausur gilt als bestanden, wenn mindestens 4 Fragen richtig beantwortet wurden. Ein Student kreuzt bei den 6 Fragen jeweils eine Antwort zufällig an. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist die Klausur bestanden?

Aufgabe 7

Ein Scheich hat in seinem Harem n ($3 < n \leq 50$) Damen. Um nicht ständig die Qual der Wahl zu haben, zieht er jeden Abend blind aus einer Urne mit n von 1 bis n durchnummerierten Kugeln drei Kugeln nacheinander. Gezogene Kugeln legt er direkt in die Urne zurück. Jede der Nummern repräsentiert eine der Haremsdamen, so dass die Chance besteht, den Abend mit einer Dame, zwei oder drei Damen zu verbringen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit verbringt der Scheich den Abend mit i Damen, $i = 1, 2, 3$?

Aufgabe 8* (10 Punkte)

Aus den Zahlen 1 bis 49 werden beim Lotto „6 aus 49“ sechs verschiedene ausgewählt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Spieler

- (a) sechs Richtige,
- (b) genau fünf Richtige,
- (c) keine Richtige,
- (d) höchstens zwei Richtige hat?