

zugehörige Seiten in Fahrmeir et al. (2007): Kap. 9.1 - 9.3

Aufgabe 58

Die Stichprobenvariablen $X_1, \dots, X_n$ seien unabhängige, identisch verteilte Zufallsvariablen mit Erwartungswert μ und Varianz σ^2 .

- (a) Zeigen Sie, dass die Schätzfunktion

$$\tilde{S}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$$

für σ^2 , d.h. das Analogon der empirischen Varianz aus der deskriptiven Statistik nicht erwartungstreu ist.

- (b) Verwenden Sie das Ergebnis aus Teilaufgabe (a) um zu zeigen, dass die alternative Schätzfunktion

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$$

als Analogon der aus der deskriptiven Statistik bekannten Stichprobenvarianz eine erwartungstreue Schätzung für σ^2 ist.

Aufgabe 59

Die Zufallsvariablen $X_1, \dots, X_n$ seien unabhängig und identisch normalverteilt mit unbekanntem Erwartungswert μ und unbekannter Varianz σ^2 . Zeigen Sie, dass $\hat{\mu}_{ML} = \bar{X}$ ein schwach konsistenter Schätzer für μ ist!

Aufgabe 60

Es sei $(X_1, \dots, X_n)$ eine i.i.d. Stichprobe aus einer Poisson-verteilten Grundgesamtheit zum Parameter $\lambda > 0$.

- (a) Bestimmen Sie die Likelihood-Funktion und eine Maximum-Likelihood-Schätzung $\hat{\lambda}_1$ für λ .
- (b) Bestimmen Sie Momentenschätzungen $\hat{\lambda}_2$ und $\hat{\lambda}_3$ für λ , indem Sie das erste und das zweite Moment betrachten.
- (c) Wie lautet der MAP-Bayes-Schätzer $\hat{\lambda}_{MAP}$, falls Sie als a priori Dichte für λ eine Exponentialverteilung mit dem Hyperparameter $\nu > 0$ annehmen. Wann stimmen $\hat{\lambda}_1$ und $\hat{\lambda}_{MAP}$ überein? Zeigen Sie, dass $\hat{\lambda}_1$ und $\hat{\lambda}_{MAP}$ übereinstimmen, wenn Sie als a priori Dichte für λ eine stetige Gleichverteilung auf dem Intervall $[0, b]$ mit $b > 0$ annehmen.

Aufgabe 61

Seien $X_1, \dots, X_n$ unabhängig identisch gleichverteilt auf $[a, b]$ mit unbekanntem Parameter $\vartheta = (a, b)$.

- a) Bestimmen Sie den Maximum-Likelihood-Schätzer für ϑ .
- b) Untersuchen Sie diesen Schätzer auf Erwartungstreue.

Aufgabe 62

Eine Grundgesamtheit bestehe aus einer bekannten Anzahl von N Elementen, von denen eine unbekannte Anzahl M die Eigenschaft E besitzt. Die Vorkenntnisse des Betrachters über den unbekannten Parameter $p = \frac{M}{N}$ lassen sich durch eine linear fallende Dichte

$$f(p) = \begin{cases} 2(1-p), & 0 \leq p \leq 1, \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

beschreiben. Aus der Grundgesamtheit wird eine iid Stichprobe vom Umfang $n = 4$ gezogen. Die relative Häufigkeit von E in der Stichprobe beträgt $\frac{3}{4}$. Bestimmen Sie die Dichte der a posteriori Verteilung für $0 \leq p \leq 1$. Wie lässt sich daraus ein Schätzer für p ermitteln?

Aufgabe 63* (10 Punkte)

In einer Werkstatt werden Kraftfahrzeuge repariert. Die zufällige Reparaturzeit für die Behebung eines bestimmten Schadentyps kann als eine mit dem unbekannten Parameter $\lambda > 0$ exponentialverteilte Zufallsgröße betrachtet werden. Die über einen konkreten Zeitraum unabhängig voneinander erfaßten Zeiten für n Reparaturen ergaben eine mittlere Reparaturdauer von 15 Zeiteinheiten.

- (a) Bestimmen Sie den Schätzer für λ nach der Momentenmethode für das 1. Moment!
- (b) Bestimmen Sie den ML-Schätzer für λ !
- (c) Untersuchen Sie die in a) und b) ermittelten Schätzer auf Erwartungstreue! (*Hinweis: Benutzen Sie dazu die Jensen'sche Ungleichung. Klären Sie dabei zunächst die Anwendbarkeit der Jensen'schen Ungleichung ab.*)

Jensen'sche Ungleichung:

Sei X eine Zufallsvariable und $g : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine konvexe Funktion. Dann gilt

$$E[g(X)] \geq g(E[X]).$$

Ist g strikt konvex auf D und $\text{Var}(X) > 0$, so gilt sogar $E[g(X)] > g(E[X])$.