10 Einführung in die statistische Testtheorie

zugehörige Seiten in Fahrmeir et al. (2007): Kap. 10

Aufgabe 69

In einer Behörde mit sehr vielen Mitarbeitern hat der Behördenvorsteher den Verdacht, dass an einem normalen Arbeitstag weniger als 70 Prozent der Arbeitnehmer wirklich an ihrem Arbeitsplatz sind. Er möchte nun einerseits diesen Missstand bei der Verwaltung zur Sprache bringen, möchte aber auf der anderen Seite auf jeden Fall das Risiko so klein wie möglich halten, Ärger mit der einflussreichen Personalvertretung zu bekommen, der sich zwangsläufig bei einer ungerechtfertigten voreiligen Meldung ergeben würde. Stellen Sie aus der Sicht des Behördenvorstehers die Hypothesen für einen Test auf den wahren Anteil der an ihrem Arbeitsplatz befindlichen Arbeitnehmer auf!

Aufgabe 70

Der Verkaufsschlager der Edumm-Käserei ist ihr 1.000g-Kugelkäse. In letzter Zeit häufen sich Beschwerden der Kunden, der Käse sei zu leicht. Die Käserei führt daraufhin (basierend auf einer einfachen Stichprobe vom Umfang n) einen statistischen Test zum Niveau $\alpha = 0.05$ auf das wahre mittlere Gewicht dieser Sorte Kugelkäse durch. Das Käsegewicht kann dabei als normalverteilt mit bekannter Varianz $\sigma^2 = 49[g^2]$ angenommen werden.

- (a) Formulieren Sie basierend auf einer Risikoüberlegung die Hypothesen für diesen Test. Erläutern Sie **inhaltlich** dasjenige Fehlentscheidungsrisiko, das bei diesem Test als weniger schwerwiegend eingeschätzt wird.
- (b) Welchen Test würden Sie durchführen? Begründung!
- (c) Zu welcher Testentscheidung kommen Sie bei einem gemessenen mittleren Käsegewicht von 1003g? Führen Sie den Test für $n = 10$ und $n = 30$ durch. Interpretieren Sie die Ergebnisse! Berechnen Sie anschließend die p-Werte und überlegen Sie, welcher Schluss mit diesen Ergebnissen möglich ist.
- (d) Berechnen und interpretieren Sie die zugehörige Gütefunktion für $n = 30$ an den Stellen $\mu_1 = 950$ und $\mu_2 = 1050$.
- (e) Erläutern Sie kurz, worin bei Verwendung eines weniger trennscharfen Tests der Nachteil läge!

Aufgabe 71

Im März 2003 wurde die Lungenkrankheit *SARS* zum ersten Mal diagnostiziert und breitete sich anschließend von China in zahlreiche andere Länder aus. Um die Todesrate von mit *SARS* infizierten Personen zu analysieren, seien in der folgenden Tabelle die Anzahl der Infizierten sowie die Anzahl der davon Gestorbenen für einige Regionen der Erde gegeben (Quelle: WHO, Stand 9. Juli 03):

Region	USA/Kanada	Europa	China/Hongkong	Asien ohne China/HK	Sonst.
Infizierte	324	34	7083	986	9
Gestorbene	38	0	646	127	1

Gehen Sie im Folgenden davon aus, dass die Anzahl der an *SARS* gestorbenen Personen binomialverteilt ist mit Parameter π und dass zwischen den infizierten Personen Unabhängigkeit gilt.

- (a) Berechnen Sie anhand der angegebenen Daten einen erwartungstreuen Schätzer (ohne Beweis) für den Parameter π .

Während der Diskussionen über die Sterblichkeit von *SARS* wurde gelegentlich vermutet, die Wahrscheinlichkeit an *SARS* zu sterben sei niedriger als die Wahrscheinlichkeit an einer "normalen" Lungenentzündung zu sterben.

- (b) Überprüfen Sie diese Vermutung mit einem geeigneten (approximativen) Test, wobei Sie davon ausgehen können, dass die Wahrscheinlichkeit an einer "normalen" Lungenentzündung zu sterben etwa 10 % beträgt. Welche Entscheidung ist anhand der Stichprobe bei einem Signifikanzniveau von $\alpha = 0.05$ zu treffen?
- (c) Berechnen und interpretieren Sie die Gütefunktion des in (b) durchgeführten Tests an den Stellen $\pi_1 = 0.09$ und $\pi_2 = 0.11$.
- (d) Berechnen und interpretieren Sie den p -Wert des in (b) durchgeführten Tests.

Aufgabe 72* (10 Punkte)

Bei Ausgrabungen werden Skelettreste bestimmter ausgewachsener Tiere gefunden. Anhand von Messungen am Schädelknochen soll überprüft werden, ob es Tiere derjenigen Art sind, für die ein durchschnittliches Maß von $\mu_0 = 146$ bekannt ist. Zudem weiß man, dass die Schädelmessungen Realisationen einer normalverteilten Zufallsvariable sind. An $n = 10$ Skeletten werden folgende Werte gemessen:

141, 140, 145, 136, 146, 141, 154, 138, 151, 150.

Die Varianz ist unbekannt und wird auf $s^2 \approx 36$ geschätzt.

- (a) Testen Sie $H_0 : \mu = 146$ gegen $H_1 : \mu \neq 146$ zu einem Signifikanzniveau von $\alpha = 0.05$.
- (b) Bestimmen und interpretieren Sie den p -Wert des verwendeten Tests.
- (c) Leiten Sie die Gütefunktion des verwendeten Tests her. Bestimmen und interpretieren Sie die Gütefunktion an den Stellen $\mu_1 = 140$ und $\mu_2 = 150$. Wie ändert sich die Gütefunktion für $\alpha = 0.01$?

Hinweise (R-Befehle):

Verteilung	Dichte	Verteilungsfunktion	Quantilfunktion
Normalverteilung	<code>dnorm(wert,μ,σ)</code>	<code>pnorm(wert,μ,σ)</code>	<code>qnorm(wert,μ,σ)</code>
Exponentialverteilung	<code>dexp(wert,λ)</code>	<code>pexp(wert,λ)</code>	<code>qexp(wert,λ)</code>
t-Verteilung	<code>dt(wert, df)</code>	<code>pt(wert, df)</code>	<code>qt(wert, df)</code>
X^2 -Verteilung	<code>dchisq(wert, df)</code>	<code>pchisq(wert, df)</code>	<code>qchisq(wert, df)</code>
Poisson-Verteilung	<code>dpois(wert,λ)</code>	<code>ppois(wert,λ)</code>	<code>qpois(wert,λ)</code>

df steht dabei für die Freiheitsgrade.

Aufgabe 73

Die Anforderung bei der Six Sigma Qualität ist, dass die Abweichung einer Produktionslinie von einer Zielgröße μ_0 in bestimmten Grenzen (obere Grenze: USL , untere Grenze: LSL) liegen muss. Um zu überprüfen, ob die Anforderungen der Six Sigma Qualität erfüllt sind, kann zum Beispiel

$$H_0 : \sigma^2 \geq \sigma_0^2 \quad \text{gegen} \quad H_1 : \sigma^2 < \sigma_0^2$$

getestet werden (einseitiger Varianz-Test) mit

$$\sigma_0^2 := \frac{1}{6} \min\{USL - \mu_0, \mu_0 - LSL\}.$$

Ein Werkstück soll laut Norm eine Länge von $\mu_0 = 10[cm]$ besitzen. Als obere und untere Toleranzschranken sind $USL = 12[cm]$ und $LSL = 8.5[cm]$ vorgegeben. Die Überprüfung der Länge X (in cm) von $n = 15$ Werkstücken ergab folgende Größen

$$\sum_{i=1}^n x_i = 148.5 \quad \text{und} \quad \sum_{i=1}^n x_i^2 = 1475.75.$$

- (a) Überlegen Sie sich eine geeignete Teststatistik (inkl. ihrer Verteilung) und geben Sie den Ablehnungsbereich an.
- (b) Führen Sie den Test für obige Aufgabenstellung zum Signifikanzniveau $\alpha = 0.05$ durch.