6 Stetige Zufallsvariablen

zugehörige Seiten in Fahrmeir et al. (2007): Kap. 6.1 - 6.2

Aufgabe 27

Sei X eine beliebige stetige Zufallsvariable mit Dichte $f(x)$ und Verteilungsfunktion $F(x)$. Überprüfen Sie die folgenden Aussagen auf ihren Wahrheitsgehalt und begründen Sie Ihre Entscheidungen.

(a) $f(x) \leq 1$ für alle x.

(b) $F(x) \leq 1$ für alle x.

(c) $\int_x^\infty f(t)dt = 1 - F(x)$.

(d) Ist $x_i < x_j$, so gilt $F(x_i) \leq F(x_j)$.

Aufgabe 28

Eine stetige Zufallsvariable X habe die Dichte

$$f(x) = \begin{cases} 1 - |x|, & -1 \leq x \leq 1, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

(a) Überprüfen Sie, ob die Funktion $f(x)$ die geforderten Dichteeigenschaften besitzt.

(b) Berechnen Sie die Verteilungsfunktion $F(x)$ und skizzieren Sie deren Verlauf.

(c) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit $P(|X| \leq 0.5)$.

Aufgabe 29

Das statistische Bundesamt hält für die Wachstumsrate X des Bruttosozialproduktes alle Werte im Intervall $2 \leq X \leq 3$ für prinzipiell möglich und unterstellt für ihre Analyse folgende Funktion

$$f(x) = \begin{cases} c(x-2), & 2 \leq x \leq 3, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

(a) Bestimmen Sie c derart, dass obige Funktion eine Dichtefunktion ist.

(b) Bestimmen Sie die Verteilungsfunktion der Zufallsvariable X.

(c) Berechnen Sie $P(X > 2.1)$ und $P(2.1 < X < 2.8)$.

(d) Berechnen Sie $P(-4 \leq X \leq 3 | X \leq 2.1)$, und zeigen Sie, dass die Ereignisse $\{-4 \leq X \leq 3\}$ und $\{X \leq 2.1\}$ stochastisch unabhängig sind.

(e) Bestimmen Sie den Erwartungswert, den Modus, den Median und die Varianz von X. Was lässt sich über den Verteilungstyp von X aussagen?

Aufgabe 30

Sei X eine stetige Zufallsvariable. Die zugehörige Dichte $f(x)$ sei symmetrisch um $x = a$. Zeigen Sie, dass $E(X) = a$ gilt, falls $E(X)$ existiert.

Aufgabe 31

An einer Bahnstation fahren S-Bahnen in Richtung A alle 15 Minuten, beginnend um 7.00 Uhr, und S-Bahnen in Richtung B alle 20 Minuten, beginnend um 7.07 Uhr. Wenn ein Fahrgast zufällig zu einer gleichverteilten Zeit zwischen 7.00 Uhr und 8.00 Uhr den Bahnsteig erreicht und in die nächste S-Bahn einsteigt, wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass er eine S-Bahn in Richtung A nimmt?

Aufgabe 32

Seien $U_1, \ldots, U_n$ unabhängige und identisch verteilte Zufallsvariablen, die gleichverteilt auf dem Intervall $[a, b]$ sind.

(a) Bestimmen Sie die Verteilungsfunktion von $Z_n := \max\{U_1, \ldots, U_n\}$.

(b) Wie groß muss n gewählt werden, damit $P(Z_n > a + 0.9 \cdot (b - a))$ größer als 99 Prozent ist?