zugehörige Seiten in Fahrmeir et al. (2007): Kap. 6

Aufgabe 33

Ein System funktioniert für eine zufällige Zeitdauer X (in Monaten gemessen). Als Dichtefunktion von X soll folgende Funktion dienen:

$$f(x) = \begin{cases} Cxe^{-\frac{x}{2}}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0. \end{cases}$$

- (a) Für welches C ist obige Funktion eine Dichtefunktion?
- (b) Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass das System mindestens 5 Monate lang funktioniert?

Aufgabe 34* (10 Punkte)

Von einer stetigen Zufallsvariable X , die von einem Parameter $\theta \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ abhängt, sei die Verteilungsfunktion gegeben:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < -2, \\ \frac{1}{4}(x+2) + \frac{1}{8}\theta(x^2-4), & -2 \leq x \leq 2, \\ 1, & x > 2. \end{cases}$$

- (a) Berechnen Sie die Dichte $f(x)$ von X .
- (b) Welche spezielle Verteilung liegt für $\theta = 0$ vor?
- (c) Berechnen Sie den Erwartungswert von X in Abhängigkeit von θ .

Aufgabe 35

- (a) Zeigen Sie, dass eine exponentialverteilte Zufallsvariable X „gedächtnislos“ ist, d.h. dass für alle positiven Zahlen s und t gilt

$$P(X > s+t | X > s) = P(X > t).$$

- (b) Seien $X_1, \dots, X_n$ unabhängige und identisch verteilte Zufallsvariablen, die einer Exponentialverteilung mit Parameter λ folgen. Zeigen Sie: $m_n = \min\{X_1, \dots, X_n\}$ ist exponentialverteilt mit dem Parameter $n\lambda$.

Aufgabe 36

Die Ausfallrate einer bestimmten Sorte elektrischer Bauteile sei konstant und die mittlere Lebensdauer betrage 500 Stunden.

- (a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Bauteil vor dem Zeitpunkt $t_0 = 100$ nicht ausfällt?
- (b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Bauteil zwischen den Zeitpunkten $t_1 = 200$ und $t_3 = 300$ ausfällt?
- (c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Bauteil vor dem Zeitpunkt t_1 ausfällt? Wie groß ist diese Wahrscheinlichkeit, wenn man weiß, dass es zum Zeitpunkt t_0 noch intakt war?
- (d) Welchen Zeitpunkt überlebt ein Bauteil mit genau 90% Sicherheit; welche Zeitpunkte überlebt es mit mindestens 90% Sicherheit?

- (e) Für welche Verteilung aus derselben Verteilungsfamilie ergibt sich eine Lebensdauerverteilung, bei der mit Wahrscheinlichkeit 0.9 die Lebensdauer eines Bauteils mindestens 50 Stunden beträgt?

Aufgabe 37

An einem Fluss wird täglich der Quecksilbergehalt des Wassers gemessen, der annähernd normalverteilt ist mit $\mu = 25$ ppm und $\sigma^2 = 25$ ppm² (ppm = parts per million).

- (a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass an einem Tag
- (i) mehr als 32.5 ppm
 - (ii) höchstens 25 ppm
 - (iii) zwischen 22.5 und 30 ppm
- gemessen werden?
- (b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Quecksilbergehalt in das dreifache zentrale Schwankungsintervall fällt?
- (c) Geben Sie ein um den Erwartungswert symmetrisches Intervall an, in dem mit einer Wahrscheinlichkeit von 0.95 der Quecksilbergehalt des Wassers liegt.
- (d) Um die Bevölkerung zu beruhigen, will die zuständige Behörde einen kritischen Wert c definieren, derart, dass dieser Wert nur an 2% der Tage überschritten wird. Die Behörde erklärt, dass der Zustand des Wassers unbedenklich ist, solange dieser kritische Wert nicht überschritten wird. Wie groß muss c gewählt werden?

Aufgabe 38

Sei X eine stetige Zufallsvariable mit Dichtefunktion f_X . Bestimmen Sie Dichte- und Verteilungsfunktion von $Y := X^2$.