8 Mehrdimensionale Zufallsvariablen

zugehörige Seiten in Fahrmeir et al. (2007): Kap. 8

Aufgabe 47

Sei X die Anzahl der Wagen und Y die Anzahl der Inhaber eines Führerscheins in einer Familie. Die Randwahrscheinlichkeiten von X bzw. von Y seien durch

$$f_X(x) = \begin{cases} 0.6, & x = 1 \\ 0.4, & x = 2 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \qquad f_Y(y) = \begin{cases} 0.1, & y = 1, 4 \\ 0.5, & y = 2 \\ 0.3, & y = 3 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

gegeben.
Die Wahrscheinlichkeit, dass die Familie ein Auto besitzt, wenn drei Führerscheininhaber in der Familie sind, sei 0.4. Die Wahrscheinlichkeit, dass zwei Führerscheininhaber in der Familie sind, wenn sie zwei Autos besitzt, sei 0.3. Außerdem sei die Wahrscheinlichkeit, dass in der Familie vier Führerscheininhaber sind und ein Auto gleich 0.03.

(a) Bestimmen Sie die gemeinsame Wahrscheinlichkeitsfunktion $f_{X,Y}(x, y)$ und stellen Sie diese in einer Kontingenztabelle dar. Sind X und Y unabhängig?

(b) Bestimmen Sie die Verteilungsfunktion von Y unter der Bedingung $X = 1$.

(c) Berechnen Sie die Kovarianz und Korrelation von X und Y.

Aufgabe 48* (10 Punkte)

X und Y seien zwei Zufallsvariablen, deren gemeinsame Dichtefunktion folgende Form hat

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} c \cdot (x + y + xy) & , 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1 \\ 0 & , \text{sonst} \end{cases}$$

(a) Wie groß muss c sein, damit $f_{X,Y}(x, y)$ tatsächlich eine Dichte ist?

(b) Wie lauten die Randdichten von X und Y?

(c) Wie lauten die bedingten Dichten?

(d) Berechnen Sie die Kovarianz zwischen X und Y.

(e) Bestimmen Sie die gemeinsame Verteilungsfunktion $F_{X,Y}(x, y)$.

Aufgabe 49

X und Y seien unabhängig und Poisson-verteilt mit den Parametern λ_X bzw. λ_Y.

(a) Bestimmen Sie die Verteilung von $X + Y$.

(b) Bestimmen Sie die bedingte Verteilung von X, gegeben $X + Y = n$.

Aufgabe 50

Die Anzahl an Kunden, die ein Postamt an einem Tag besuchen, ist Poisson-verteilt zum Parameter λ. Jede Person, die die Post betritt, sei mit Wahrscheinlichkeit $p\,(0 < p < 1)$ eine Frau und mit Wahrscheinlichkeit $1 - p$ ein Mann. Sei X die Anzahl der Frauen und Y die Anzahl der Männer, die das Postamt an einem Tag besuchen.

(a) Bestimmen Sie die gemeinsame Wahrscheinlichkeitsverteilung $P(X = i, Y = j)$.

(b) Sind X und Y unabhängig?

(c) Wieviele Frauen besuchen an einem Tag im Mittel das Postamt, wenn bekannt ist, dass insgesamt n Kunden das Postamt besuchen?

Aufgabe 51

Sei X hypergeometrisch verteilt, also

$$P(X = j) = \begin{cases} \frac{\binom{M}{j}\binom{N-M}{n-j}}{\binom{N}{n}}, & \text{für } j \in \{\max(0, n - (N - M)), \dots, \min(n, M)\} \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass $E(X) = n\frac{M}{N}$ und $Var(X) = n\frac{M}{N}\left(1 - \frac{M}{N}\right)\frac{N-n}{N-1}$.

Aufgabe 52

Seien X, Y und Z unabhängige und exponentialverteilte Zufallsvariablen zum Parameter λ. Berechnen Sie die Dichtefunktionen von $X + Y$ und $X + Y + Z$.