

9 Punktschätzer

zugehörige Seiten in Fahrmeir et al. (2007): Kap. 9.1 - 9.2

Aufgabe 53

Eine Apotheker-Familie besitzt in einer Stadt 4 Filialen, für die die folgenden durchschnittlichen Umsätze U_i pro Tag in Euro ermittelt wurden:

Filiale	Nord	Ost	Süd	West
U_i	2000	1200	6800	4000

- (a) Berechnen Sie den durchschnittlichen Tagesumsatz der 4 Filialen.
- (b) Ziehen Sie aus den 4 Filialen alle möglichen Stichproben ohne Zurücklegen vom Umfang $n = 2$ und schätzen Sie in jeder Stichprobe den durchschnittlichen Tagesumsatz $\bar{u}$. Bestimmen Sie anschließend die Wahrscheinlichkeitsverteilung von $\bar{U}$ und berechnen Sie daraus Erwartungswert und Standardabweichung von $\bar{U}$.
- (c) Gehen Sie nun davon aus, dass die Grundgesamtheit der 4 Filialen in zwei Schichten G_1 und G_2 aufgeteilt wird und anschließend aus jeder Schicht ein Element ausgewählt wird. Dabei sollen folgende zwei Fälle der Schichtenbildung unterschieden werden:
 - (i) $G_1 = \{\text{Nord, Ost}\}$, $G_2 = \{\text{Süd, West}\}$
 - (ii) $G_1 = \{\text{Süd, Ost}\}$, $G_2 = \{\text{Nord, West}\}$

Geben Sie für die zwei Fälle jeweils die Wahrscheinlichkeitsverteilung von $\bar{U}$ an und berechnen Sie daraus jeweils Erwartungswert und Standardabweichung von $\bar{U}$.

- (d) Vergleichen Sie die Ergebnisse der Teilaufgaben (a)-(c). Welche Schlüsse lassen sich ziehen?

Aufgabe 54

Der Verband der Spielwarenindustrie ist durch Meldungen über den Rückgang der Kinderzahl in einer bestimmten Region beunruhigt und führt daher eine Umfrage unter 2800 Haushalten durch. Aus den 2000 beantworteten Fragebögen wurde folgende Häufigkeitstabelle ermittelt

Kinderzahl	0	1	2	3	4	5
Anzahl Haushalte	1100	400	350	100	40	10

- (a) Geben Sie einen erwartungstreuen Schätzer (mit Nachweis der Erwartungstreue) für den Anteil p der Haushalte ohne Kinder an. Welcher Wert $\hat{p}$ ergibt sich für die Daten?
- (b) Leiten Sie die Varianz Ihres in Teilaufgabe (a) abgeleiteten Schätzers für p her. Für welchen Wert von p ist die Varianz bei festem Stichprobenumfang maximal?

Aufgabe 55

In Tabletten gegen Kopfschmerzen ist die Menge des enthaltenen Wirkstoffs normalverteilt. Da bei zu geringer Wirkstoffmenge die Tabletten nicht helfen, bei zu hoher Menge aber Nebenwirkungen auftreten, muss die Produktion überwacht werden.

1. Mit Hilfe einer klassischen Zufallsstichprobe vom Umfang n wird geschätzt, wie hoch die durchschnittliche Wirkstoffmenge μ (in mg) ist. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Stichprobenfunktion $\bar{X}$ Werte annimmt, die mehr als 0.5 mg über dem wahren Wert μ liegen
 - (a) bei $\sigma = 1$ und $n = 16$?
 - (b) bei $\sigma = 1$ und $n = 64$?
 - (c) bei $\sigma = 2$ und $n = 64$?
2. Warum lässt sich die in 1) bestimmte Wahrscheinlichkeit nicht berechnen, wenn σ unbekannt ist? Geben Sie eine formale und inhaltliche Begründung.
3. Mit Hilfe einer klassischen Zufallsstichprobe wird geschätzt, wie groß die Varianz σ^2 der Wirkstoffmenge ist.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Stichprobenvarianz mehr als doppelt so groß ist wie die wahre Varianz,
 - (a) wenn μ unbekannt ist und $n = 7$?
 - (b) wenn μ unbekannt ist und $n = 16$?
 - (c) Ändern sich die Ergebnisse aus (a) und (b), wenn μ bekannt ist? Kurze Begründung!

Aufgabe 56

Zeigen Sie, dass eine im quadratischen Mittel konsistente Schätzfunktion auch schwach konsistent ist.

Aufgabe 57* (10 Punkte)

Gegeben sei eine Zufallsvariable X für die sowohl $E(X) = \mu$ als auch $Var(X) = \sigma^2$ existieren. Als Schätzfunktion für μ wurden von verschiedenen schlaun Statistikern die folgenden Vorschläge gemacht

$$\begin{aligned}\hat{\mu}_1 &= \bar{X} \\ \hat{\mu}_2 &= \bar{X} + 0.0003 \\ \hat{\mu}_3 &= \frac{n+12}{n} \bar{X}\end{aligned}$$

Sie können dabei davon ausgehen, dass die Stichprobenvariablen $X_1, \dots, X_n$ unabhängig und identisch wie X verteilt sind.

- (a) Überprüfen Sie die Schätzfunktionen auf ihre Erwartungstreue.
- (b) Berechnen Sie für die Schätzfunktionen jeweils den MSE. Welche der Schätzer sind MSE-konsistent?
- (c) Welche der Schätzfunktionen würden Sie favorisieren und warum?