Einführung in die Wahrscheinlichkeitsrechnung

Marco Cattaneo
Institut für Statistik
Ludwig-Maximilians-Universität München

Sommersemester 2011

Beispiel: Außersinnliche Wahrnehmung

In 1973 führte Charles Tart an der University of California in Davis ein Experiment durch, um die außersinnlichen Wahrnehmungsfähigkeiten von 15 Subjekten zu prüfen. Ein Computer wählte zufällig eines von 4 Symbolen, und ein Subjekt versuchte, durch außersinnliche Wahrnehmung das gewählte Symbol herauszufinden. Die Subjekte machten je 500 Versuche und waren insgesamt 2006 mal erfolgreich.

- Die interessante Frage „*War hier außersinnliche Wahrnehmung im Spiel?*“ lässt sich leider auch nicht mit induktiver Statistik direkt beantworten.
- Aber die Frage „*Kann das Resultat durch reinen Zufall erklärt werden?*“ lässt sich mit induktiver Statistik beantworten: die Antwort ist negativ.
- Um zu dieser negativen Antwort zu kommen, muss man eigentlich die Frage „*Wie (un)wahrscheinlich ist es, dass das Resultat allein auf Zufall zurückzuführen ist?*“ beantworten.

Zufallsvorgang

- Ergebnisraum: Menge $\Omega \neq \varnothing$ (genau ein *Ergebnis* $\omega \in \Omega$ wird eintreten, wir wissen noch nicht welches)
- *Ereignis*: Menge $A \subseteq \Omega$ von Ergebnissen (A tritt ein $\Leftrightarrow$ ein $\omega \in A$ tritt ein)
- Elementarereignis: $\{\omega\}$ mit $\omega \in \Omega$ (Elementarereignisse $\cong$ Ergebnisse)
- unmögliches Ereignis: $A = \varnothing$
- sicheres Ereignis: $A = \Omega$
- Ereignis „nicht A“: $\bar{A} = \Omega \setminus A$ (Komplement von A, Differenz von Ω und A)
- Ereignis „A oder B“: $A \cup B$ (Vereinigung von A und B)
- Ereignis „A und B“: $A \cap B$ (Durchschnitt von A und B)
- disjunkte Ereignisse: A und B mit $A \cap B = \varnothing$

Klassische Wahrscheinlichkeit

Der Ergebnisraum Ω ist endlich und $|A|$ bezeichnet die Mächtigkeit von $A \subseteq \Omega$ (d.h. $|A|$ ist die Anzahl der Elemente von A).

Wahrscheinlichkeit des Ereignisses $A \subseteq \Omega$:

$$P(A) = \frac{\text{Anzahl der für } A \text{ günstigen Ergebnisse}}{\text{Anzahl aller möglichen Ergebnisse}} = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

P kann als Abbildung (*Wahrscheinlichkeitsmaß*)

$$P : \mathcal{P}(\Omega) \to [0, 1]$$

interpretiert werden, wobei $\mathcal{P}(\Omega)$ die Potenzmenge von Ω bezeichnet (d.h. $\mathcal{P}(\Omega)$ ist die Menge aller Teilmengen von Ω).

Kombinatorik

Anzahl aller möglichen Stichproben von Umfang n aus einer Grundgesamtheit von Umfang N:

	mit Zurücklegen		ohne Zurücklegen
mit Berücksichtigung der Reihenfolge	N^n	$\geq$	$\frac{N!}{(N-n)!}$
	$\geq$		$\geq$
ohne Berücksichtigung der Reihenfolge	$\binom{N+n-1}{n}$	$\geq$	$\binom{N}{n}$

Fakultät: $k! = \prod_{i=1}^{k} i$, mit $0! = 1$

Binomialkoeffizient: $\binom{m}{k} = \frac{m!}{(m-k)!\,k!}$

Eine allgemeinere Definition von Wahrscheinlichkeit

Der Ergebnisraum Ω ist endlich oder abzählbar unendlich (z.B. $\Omega = \mathbb{N}$).

Wahrscheinlichkeitsverteilung: $f : \Omega \to [0,1]$ mit $\sum_{\omega \in \Omega} f(\omega) = 1$

zugehöriges Wahrscheinlichkeitsmaß: $P : \mathcal{P}(\Omega) \to [0,1]$ mit $P(A) = \sum_{\omega \in A} f(\omega)$

klassische Wahrscheinlichkeit: $f(\omega) = \frac{1}{|\Omega|}$ (*Gleichverteilung*)

Für eine Abbildung $P : \mathcal{P}(\Omega) \to \mathbb{R}$ ist die Existenz einer zugehörigen Wahrscheinlichkeitsverteilung äquivalent zu den folgenden 3 „Axiomen" von Kolmogorow:

1. $P(A) \geq 0$ für alle $A \subseteq \Omega$
2. $P(\Omega) = 1$
3. $P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$ für alle $A_1, A_2, \ldots \subseteq \Omega$ paarweise disjunkt

Rechenregeln und Eigenschaften

1. $P(\varnothing) = 0$
2. $P\left(\bigcup_{i=1}^{k} A_i\right) = \sum_{i=1}^{k} P(A_i)$ für alle $A_1, A_2, \ldots, A_k \subseteq \Omega$ paarweise disjunkt
3. $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$ für alle $A \subseteq \Omega$
4. $A \subseteq B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$ für alle $A, B \subseteq \Omega$
5. $P(A) \in [0, 1]$ für alle $A \subseteq \Omega$
6. $P(A \cup B) + P(A \cap B) = P(A) + P(B)$ für alle $A, B \subseteq \Omega$

Bedingte Wahrscheinlichkeit

Bedingte Wahrscheinlichkeit von A gegeben B (mit $P(B) > 0$):

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Die Abbildung $P(\cdot \mid B) : \mathcal{P}(\Omega) \to [0,1]$ ist ein Wahrscheinlichkeitsmaß, d.h. $P(\cdot \mid B)$ erfüllt die Axiome von Kolmogorow und die Rechenregeln für Wahrscheinlichkeitsmaße, insbesondere:

- $P(\varnothing \mid B) = 0$
- $P\left(\bigcup_{i=1}^{k} A_i \mid B\right) = \sum_{i=1}^{k} P(A_i \mid B)$ für alle $A_1, A_2, \ldots, A_k \subseteq \Omega$ paarweise disjunkt
- $P(\bar{A} \mid B) = 1 - P(A \mid B)$ für alle $A \subseteq \Omega$

Außerdem:

- $B \subseteq A \Rightarrow P(A \mid B) = 1$ für alle $A \subseteq \Omega$
- $P(A \mid \Omega) = P(A)$ für alle $A \subseteq \Omega$

Unabhängigkeit

Zwei Ereignisse $A, B \subseteq \Omega$ heißen (stochastisch) *unabhängig*, wenn

$$P(A \cap B) = P(A)\,P(B)$$

A und B sind genau dann unabhängig, wenn

- entweder $P(B) = 0$
- oder $P(A \mid B) = P(A)$ (d.h. die Infomation, dass B eingetreten ist, ändert nicht die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten von A)

Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit

Sei $A_1, A_2, \ldots, A_k$ eine disjunkte Zerlegung von Ω (d.h. $A_1, A_2, \ldots, A_k \subseteq \Omega$ paarweise disjunkt und $\bigcup_{i=1}^{k} A_i = \Omega$) mit $P(A_i) > 0$ für alle $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$.

Dann gilt für alle Ereignisse $B \subseteq \Omega$:

$$P(B) = \sum_{i=1}^{k} P(B \mid A_i)\, P(A_i)$$

Satz von Bayes

Sei $A_1, A_2, \ldots, A_k$ eine disjunkte Zerlegung von Ω (d.h. $A_1, A_2, \ldots, A_k \subseteq \Omega$ paarweise disjunkt und $\bigcup_{i=1}^k A_i = \Omega$) mit $P(A_i) > 0$ für alle $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$.

Dann gilt für alle $j \in \{1, 2, \ldots, k\}$ und alle Ereignisse $B \subseteq \Omega$ mit $P(B) > 0$:

$$P(A_j \mid B) = \frac{P(B \mid A_j)\, P(A_j)}{\sum_{i=1}^k P(B \mid A_i)\, P(A_i)}$$