Stetige Zufallsvariable

Eine Zufallsvariable $X : \Omega \to \mathbb{R}$ heißt *stetig*, wenn es eine Funktion $f : \mathbb{R} \to [0, +\infty)$ gibt, so dass

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(y)\, dy$$

für alle $x \in \mathbb{R}$; eine solche Funktion f heißt *Dichte* von X.

Daraus folgt:

- $P(X = x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$
- $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx = 1$
- $P(a \leq X \leq b) = P(a < X \leq b) = P(a \leq X < b) = P(a < X < b) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\, dx$ für alle $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a \leq b$
- die Verteilungsfunktion F ist stetig und $f(x) = F'(x)$, wenn f stetig an der Stelle x ist

Die stetigen Zufallsvariablen $X_1, X_2, \ldots, X_k$ sind genau dann unabhängig, wenn

$$P(X_1 \leq x_1,\, X_2 \leq x_2,\, \ldots,\, X_k \leq x_k) = \prod_{i=1}^{k} P(X_i \leq x_i)$$

für alle $x_1, x_2, \ldots, x_k \in \mathbb{R}$.

Erwartungswert

Erwartungswert der stetigen Zufallsvariablen X:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f(x)\, dx$$

Der Erwartungswert ist ein Lagemaß ($E(X)$ ist der Schwerpunkt der Verteilung von X).

Eigenschaften des Erwartungswertes für stetige Zufallsvariable $X, X_1, X_2, \ldots, X_k$:

- $E\left(g(X)\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\, f(x)\, dx$ für alle Funktionen $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (z.B. $E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2\, f(x)\, dx$)
- Dichte f symmetrisch um c (d.h. $f(c-x) = f(c+x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$) und $\int_{-\infty}^{+\infty} x\, f(x)\, dx$ wohldefiniert $\Rightarrow E(X) = c$
- *Linearität*: $E\left(\sum_{i=1}^{k} \alpha_i\, X_i\right) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i\, E(X_i)$ für alle $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{R}$
- $X_1, X_2, \ldots, X_k$ unabhängig $\Rightarrow E\left(\prod_{i=1}^{k} X_i\right) = \prod_{i=1}^{k} E(X_i)$

Varianz

Varianz der stetigen Zufallsvariablen X mit $\mu = E(X)$:

$$Var(X) = E\left((X-\mu)^2\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^2 \, f(x) \, dx$$

Standardabweichung von X:

$$\sigma = \sqrt{Var(X)}$$

Die Varianz und die Standardabweichung sind Streuungsmaße ($Var(X)$ ist die erwartete quadratische Abweichung der Zufallsvariablen X von ihrem Erwartungswert μ).

Eigenschaften der Varianz für stetige Zufallsvariable $X, X_1, X_2, \ldots, X_k$:

- $Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2$
- Dichte f symmetrisch um c (d.h. $f(c-x) = f(c+x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$) und $\int_{-\infty}^{+\infty} x \, f(x) \, dx$ wohldefiniert $\Rightarrow Var(X) = 2 \int_0^{+\infty} x^2 \, f(c+x) \, dx$
- $X_1, X_2, \ldots, X_k$ unabhängig $\Rightarrow Var\left(\sum_{i=1}^k \alpha_i \, X_i\right) = \sum_{i=1}^k \alpha_i^2 \, Var(X_i)$ für alle $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{R}$

Gleichverteilung

Eine (stetige) Zufallsvariable X heißt *gleichverteilt* auf dem Intervall $[a, b]$ (kurz: $X \sim U(a, b)$), wenn sie die folgende Dichte besitzt:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < a \\ \frac{1}{b-a} & \text{für } a \leq x \leq b \\ 0 & \text{für } b < x \end{cases}$$

Eigenschaften:

- $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{für } a \leq x \leq b \\ 1 & \text{für } b < x \end{cases}$
- $E(X) = \frac{a+b}{2}$ (d.h. $E(X)$ ist der Mittelpunkt des Intervalls $[a, b]$)
- $Var(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$

Exponentialverteilung

Eine (stetige) Zufallsvariable X heißt *exponentialverteilt* mit Parameter $\lambda \in (0, +\infty)$ (kurz: $X \sim Exp(\lambda)$), wenn sie die folgende Dichte besitzt:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0 \\ \lambda\, e^{-\lambda\, x} & \text{für } 0 \leq x \end{cases}$$

Eigenschaften:

- $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda\, x} & \text{für } 0 \leq x \end{cases}$
- $E(X) = \frac{1}{\lambda}$
- $Var(X) = \frac{1}{\lambda^2}$
- $Y \sim Exp(\mu)$ unabhängig von $X \Rightarrow \min(X, Y) \sim Exp(\lambda + \mu)$

Normalverteilung

Eine (stetige) Zufallsvariable X heißt *normalverteilt* mit Parametern $\mu \in \mathbb{R}$ und $\sigma \in (0, +\infty)$ (kurz: $X \sim N(\mu, \sigma^2)$), wenn sie die folgende Dichte besitzt:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\,\pi}\,\sigma}\, e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\,\sigma^2}}$$

Eigenschaften:

- $E(X) = \mu$
- $Var(X) = \sigma^2$
- $(\alpha\, X + \beta) \sim N(\alpha\,\mu + \beta,\, \alpha^2\,\sigma^2)$ für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$
- $X_1, X_2, \ldots, X_k$ unabhängig mit $X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2)$ für alle $i \in \{1, 2, \ldots, k\} \Rightarrow$ $\left(\sum_{i=1}^k \alpha_i\, X_i\right) \sim N\left(\sum_{i=1}^k \alpha_i\,\mu_i,\, \sum_{i=1}^k \alpha_i^2\,\sigma_i^2\right)$ für alle $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{R}$

Standardisierung

Wenn X eine Zufallsvariable mit $E(X) = \mu$ und $Var(X) = \sigma^2$ ist, heißt $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$ die zu X gehörige *standardisierte Zufallsvariable*.

Daraus folgt: $E(Z) = 0$ und $Var(Z) = 1$.

Insbesondere: $X \sim N(\mu, \sigma^2) \Rightarrow Z \sim N(0, 1)$ (d.h. Z ist *standardnormalverteilt*).

Die Verteilungsfunktion der Zufallsvariablen $Z \sim N(0, 1)$ wird mit Φ bezeichnet (d.h. $\Phi(x) = P(Z \leq x)$).

Daraus folgt: $X \sim N(\mu, \sigma^2) \Rightarrow F(x) = P(X \leq x) = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Insbesondere: $X \sim N(\mu, \sigma^2) \Rightarrow P(\mu - c\,\sigma \leq X \leq \mu + c\,\sigma) = 2\,\Phi(c) - 1$ für alle $c \in [0, +\infty)$.

Logarithmische Normalverteilung

Eine (stetige) Zufallsvariable X heißt *logarithmisch normalverteilt* mit Parametern $\mu \in \mathbb{R}$ und $\sigma \in (0, +\infty)$ (kurz: $X \sim LN(\mu, \sigma^2)$), wenn sie die folgende Dichte besitzt:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \leq 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2\,\pi}\,\sigma\,x}\, e^{-\frac{(\log(x)-\mu)^2}{2\,\sigma^2}} & \text{für } 0 < x \end{cases}$$

Eigenschaften:

- $\log(X) \sim N(\mu, \sigma^2)$
- $F(x) = \Phi\left(\frac{\log(x)-\mu}{\sigma}\right)$ für alle $x \in \mathbb{R}$
- $E(X) = e^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}}$
- $Var(X) = \left(e^{\sigma^2} - 1\right)\, e^{2\,\mu + \sigma^2}$

Chi-Quadrat-Verteilung

Eine (stetige) Zufallsvariable X heißt *Chi-Quadrat-verteilt* mit $n \in \mathbb{N}$ Freiheitsgraden (kurz: $X \sim \chi^2_n$), wenn sie die folgende Dichte besitzt:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0 \\ \frac{x^{\frac{n}{2}-1}\, e^{-\frac{x}{2}}}{2^{\frac{n}{2}}\, \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} & \text{für } 0 \leq x \end{cases}$$

Eigenschaften:

- $Z_1, Z_2, \ldots, Z_n \overset{u.i.v.}{\sim} N(0,1) \Rightarrow \left(\sum_{i=1}^n Z_i^2\right) \sim \chi^2_n$
- $E(X) = n$
- $Var(X) = 2\,n$

Studentsche t-Verteilung

Eine (stetige) Zufallsvariable X heißt *t-verteilt* mit $n \in \mathbb{N}$ Freiheitsgraden (kurz: $X \sim t_n$), wenn sie die folgende Dichte besitzt:

$$f(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{n\,\pi}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}$$

Eigenschaften:

- $Z \sim N(0,1)$ und $Y \sim \chi^2_n$ unabhängig $\Rightarrow \left(Z\sqrt{\frac{n}{Y}}\right) \sim t_n$
- $E(X) = 0$, wenn $n \geq 2$
- $Var(X) = \frac{n}{n-2}$, wenn $n \geq 3$

F-Verteilung

Eine (stetige) Zufallsvariable X heißt *F-verteilt* mit Freiheitsgraden $m, n \in \mathbb{N}$ (kurz: $X \sim F_{m,n}$), wenn sie die folgende Dichte besitzt:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0 \\ m^{\frac{m}{2}}\, n^{\frac{n}{2}}\, \frac{\Gamma\left(\frac{m+n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\, \frac{x^{\frac{m}{2}-1}}{(m\,x+n)^{\frac{m+n}{2}}} & \text{für } 0 \leq x \end{cases}$$

Eigenschaften:

- $W \sim \chi^2_m$ und $Y \sim \chi^2_n$ unabhängig $\Rightarrow \left(\frac{W}{m}\,\frac{n}{Y}\right) \sim F_{m,n}$
- $E(X) = \frac{n}{n-2}$, wenn $n \geq 3$
- $Var(X) = \frac{2\,n^2\,(m+n-2)}{m\,(n-2)^2\,(n-4)}$, wenn $n \geq 5$