# Einführung in die Induktive Statistik: Spezielle Testprobleme

Jan Gertheiss
LMU München

Sommersemester 2011

Vielen Dank an Christian Heumann für das Überlassen von TEX-Code!

# Spezielle Testprobleme

Ziel: Ausgewählte Tests zu Standardproblemen bei

- Untersuchung der Verteilung eines Merkmals: Ein-Stichproben-Fall,
- Vergleich von Verteilungen bei unabhängigen und verbundenen Stichproben: Zwei- und Mehr-Stichproben-Fall,
- Tests auf Korrelation und Unabhängigkeit.

# Spezielle Testprobleme

Übersicht:

- Ein-Stichproben-Fall
- Vergleiche aus unabhängigen Stichproben
- Vergleiche aus verbundenen Stichproben
- Zusammenhangsanalyse

# Ein-Stichproben-Fall

- Annahme: Stichprobenvariablen $X_1, \dots, X_n$ i.i.d. wie zu untersuchende Variable $X$.
- Ziele: Tests auf Lage (Erwartungswert, Median) und Verteilung.
- Tests auf Lage: Vorzeichen- und Wilcoxon-Test als nonparametrische Alternativen zum Gauß- bzw. t-Test.
- Test auf Verteilung: $\chi^2$-Anpassungstest.

## Vorzeichen-Test

- Annahmen: $X_1, \dots, X_n$ unabhängige Wiederholungen, $X$ besitzt stetige Verteilungsfunktion.
- Test über den Median $x_{med}$ von $X$.
- Hypothesen:

$$\begin{array}{lll} (a) & H_0 : x_{med} = \delta_0 & H_1 : \; x_{med} \neq \delta_0 \\ (b) & H_0 : x_{med} \geq \delta_0 & H_1 : \; x_{med} < \delta_0 \\ (c) & H_0 : x_{med} \leq \delta_0 & H_1 : \; x_{med} > \delta_0 \end{array}$$

- Teststatistik: $A =$ Anzahl der Stichprobenvariablen mit einem Wert kleiner als $\delta_0$.
- Verteilung unter $x_{med} = \delta_0$: $B(n, 0.5)$, für $n \geq 25$ approximativ $N(0.5n, 0.25n)$.
- Ablehnungsbereiche: Für $n \geq 25$ wie beim approximativen Binomialtest mit $\pi_0 = 0.5$. Für $n < 25$ exakter Binomialtest nötig.

# Vorzeichen-Test

Bemerkungen:

- Keine Annahmen über Verteilungstyp notwendig; nur: stetige Verteilungsfunktion. Deshalb: "verteilungsfreier" bzw. "nonparametrischer" Test.
- Unter $x_{med} = \delta_0$ gilt $P(X_i < \delta_0) = 0.5$; $\Rightarrow$ $A \sim B(n, 0.5)$. D.h.: Vorzeichen-Test ist spezieller Binomialtest auf $\pi_0 = 0.5$.
- Falls $X$ normalverteilt: $E(X) = \mu = x_{med}$, aber Effizienzverlust, d.h. geringere Güte als t-Test.

# Wilcoxon-Vorzeichen-Rang-Test

- Annahmen: $X_1, \ldots, X_n$ unabhängig und identisch verteilt wie $X$. $X$ metrisch skaliert und symmetrisch verteilt. Verteilungsfunktion stetig.
- Hypothesen:

$$
\begin{array}{lll}
(a) & H_0 : x_{med} = \delta_0 & H_1 : x_{med} \neq \delta_0 \\
(b) & H_0 : x_{med} \geq \delta_0 & H_1 : x_{med} < \delta_0 \\
(c) & H_0 : x_{med} \leq \delta_0 & H_1 : x_{med} > \delta_0
\end{array}
$$

# Wilcoxon-Vorzeichen-Rang-Test

- Teststatistik: $W^+ = \sum_{i=1}^{n} rg|D_i|Z_i$

  mit $D_i = X_i - \delta_0, \quad Z_i = \begin{cases} 1 & D_i > 0 \\ 0 & D_i < 0 \end{cases}.$
- Ablehnungsbereich:

$$\begin{array}{ll} (a) & W^+ < w^+_{\alpha/2} \quad \text{oder} \quad W^+ > w^+_{1-\alpha/2} \\ (b) & W^+ < w^+_{\alpha} \\ (c) & W^+ > w^+_{1-\alpha}, \end{array}$$

  wobei $w^+_{\tilde{\alpha}}$ das tabellierte $\tilde{\alpha}$-Quantil der Verteilung von $W^+$ ist.
- Für $n > 20$ ist $W^+$ approximativ verteilt nach

$$N\left(\frac{n(n+1)}{4}, \frac{n(n+1)(2n+1)}{24}\right).$$

# Wilcoxon-Vorzeichen-Rang-Test

Bemerkungen:

- Keine Annahmen über Verteilungstyp notwendig; nur: stetige und symmetrische Verteilungsfunktion. Deshalb: verteilungsfreier/nonparametrischer Test.
- Wegen Symmetrie: $x_{med} = E(X)$.

  $\Rightarrow$ Hypothesenpaare (a), (b), (c) identisch zum Gauß- und t-Test.

  $\Rightarrow$ Alternative zum t-Test; keine Normalverteilungsannahme notwendig.

# Wilcoxon-Vorzeichen-Rang-Test

- Zur Teststatistik $W^+$:
  1. Berechne die Differenzen $D_i = X_i - \delta_0, \; i = 1, \dots, n$.
  2. Bilde die zugehörigen betragsmäßigen Differenzen $|D_1|, \dots, |D_n|$.
  3. Ordne diesen betragsmäßigen Differenzen Ränge zu, d.h. der kleinste Betrag erhält den Rang 1, der zweitkleinste Betrag den Rang 2, usw.

  Bezeichnet $rg|D_i|$ den Rang von $|D_i|$, ergibt sich die Teststatistik als die Summe

$$W^+ = \sum_{i=1}^{n} rg|D_i| Z_i \quad \text{mit} \quad Z_i = \begin{cases} 1 & \text{wenn } D_i > 0 \\ 0 & \text{wenn } D_i < 0. \end{cases}$$

  $W^+$ stellt damit die Summe über alle Ränge dar, die zu Beobachtungen gehören, für die $X_i > \delta_0$, d.h. $D_i > 0$ gilt.

  Bei Bindungen (ties): Durchschnittsränge vergeben.

# Wilcoxon-Vorzeichen-Rang-Test

- Idee der Teststatistik:
  - Unter $x_{med} = \delta_0$

    $\Rightarrow$ (wegen symmetrischer Verteilung) Summe der Ränge mit $D_i > 0 \approx$ Summe der Ränge mit $D_i < 0$

    $\Rightarrow E(W^+) = (rg(D_1) + \ldots + rg(D_n))/2 = (1 + \ldots + n)/2 = \frac{n(n+1)}{4}$
  - Ist $x_{med} < \delta_0$ bzw. $x_{med} > \delta_0$:
    Anzahl der $i$ mit $X_i > \delta_0$ bzw. $X_i < \delta_0$ wird kleiner.
- Verteilung von $W^+$ unter $x_{med} = \delta_0$ hängt nicht von der wahren Verteilung von $X$ ab: verteilungsfreier Test.
- Exakte Herleitung der Verteilung von $W^+$ für endliches $n$ schwierig.
  $\Rightarrow$ Tabellen für Quantile bzw. Normalverteilungsapproximation.
- Geringer Effizienzverlust gegenüber t-Test, falls $X$ tatsächlich normalverteilt.

# $\chi^2$-Anpassungstest

**Ziel:** Testen, ob eine spezifische Verteilung, z.B. $N(10, 25)$, vorliegt, oder ein bestimmter Verteilungstyp, z.B. Normalverteilung mit beliebigen Parametern $\mu, \sigma^2$.

**Fall A:** $X$ kategorial $\in \{1, \ldots, k\}$; $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. wie $X$:

- Beobachtete Häufigkeiten: $h_1, \ldots, h_k$ für Werte $1, \ldots, k$.
- Unter $H_0 : P(X_j = i) = \pi_i \;\Rightarrow\; h_i \sim B(n, \pi_i)$, $E(h_i) = n\pi_i$.
- Idee: Vergleiche beobachtete Häufigkeiten $h_i$ mit erwarteten Häufigkeiten $n\pi_i$, $i = 1, \ldots, k$.

# $\chi^2$-Anpassungstest

**Fall B:** $X$ stetig oder diskret mit vielen Ausprägungen:

- Gruppiere $X$ in $k$ benachbarte Klassen $1, \ldots, k$.
- Berechne hypothetische Klassenhäufigkeiten $\pi_i = P(X \in i)$ für Verteilung $F$ von $X$ unter $H_0$, z.B. für Normalverteilung.
- Falls $F$ unbekannte Parameter enthält, z.B. $\mu$ und $\sigma^2$: Parameter aus Stichprobe schätzen.
- Dann weiter wie bei kategorialem $X$.

# $\chi^2$-Anpassungstest

**Definition:** $\chi^2$-Anpassungstest bei kategorialem Merkmal

- Annahme: $X_1, \ldots, X_n$ unabhängig und identisch verteilt wie $X \in \{1, \ldots, k\}$.
- Hypothesen:

$$H_0: \; P(X = i) = \pi_i, \; i = 1, \ldots, k,$$

$$H_1: \; P(X = i) \neq \pi_i \text{ für mindestens ein } i.$$

- Teststatistik:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(h_i - n\pi_i)^2}{n\pi_i}$$

- Verteilung unter $H_0$: approximativ $\chi^2(k-1)$,
  Approximation anwendbar, wenn $n\pi_i \geq 1$ für alle $i$, $n\pi_i \geq 5$ für mindestens 80 % der Zellen.
- Ablehnungsbereich: $\chi^2 > \chi^2_{1-\alpha}(k-1)$

# Vergleiche aus unabhängigen Stichproben

Ziel:

Tests zum Vergleich von Parametern und Verteilungen von zwei (oder mehr) Variablen $X, Y, \ldots$

Annahmen:

$X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. wie $X$, $Y_1, \ldots, Y_m$ i.i.d. wie $Y$;

$X_1, \ldots, X_n, Y_1, \ldots, Y_m$ insgesamt unabhängig, d.h. die Stichproben für $X$ und $Y$ sind voneinander unabhängig.

# Zwei-Stichproben-Mittelwertsvergleiche

Bezeichnungen und Annahmen:

- Metrische Merkmale $X$ und $Y$.
- Unbekannte Parameter: $E(X) = \mu_X \quad \text{und} \quad E(Y) = \mu_Y$.
- Stichprobenvariablen: $X_1, X_2, \ldots, X_n \quad \text{und} \quad Y_1, Y_2, \ldots, Y_m$.
- Annahmen:
  $X_1, \ldots, X_n$ unabhängig und identisch verteilt wie $X$,
  $Y_1, \ldots, Y_m$ unabhängig und identisch verteilt wie $Y$,
  $X_1, \ldots, X_n, Y_1, \ldots, Y_m$ unabhängig.

# Zwei-Stichproben-Mittelwertsvergleiche

Hypothesen:

- Zweiseitiges Testproblem:

$$(a) \qquad H_0 : \mu_X - \mu_Y = \delta_0 \quad \text{vs.} \quad H_1 : \mu_X - \mu_Y \neq \delta_0$$

- Einseitige Testprobleme:

$$(b) \qquad H_0 : \mu_X - \mu_Y \geq \delta_0 \quad \text{vs.} \quad H_1 : \mu_X - \mu_Y < \delta_0$$

$$(c) \qquad H_0 : \mu_X - \mu_Y \leq \delta_0 \quad \text{vs.} \quad H_1 : \mu_X - \mu_Y > \delta_0$$

# Zwei-Stichproben-Mittelwertsvergleiche

| Annahmen | Teststatistik | Ablehnbereiche |
|---|---|---|
| $X \sim N(\mu_X, \sigma_X^2)$,<br>$Y \sim N(\mu_Y, \sigma_Y^2)$,<br>$\sigma_X^2, \sigma_Y^2$ bekannt. | $Z = \frac{\bar{X} - \bar{Y} - \delta_0}{\sqrt{\frac{\sigma_X^2}{n} + \frac{\sigma_Y^2}{m}}}$ | (a) $\lvert Z \rvert > z_{1-\alpha/2}$<br>(b) $Z < -z_{1-\alpha}$<br>(c) $Z > z_{1-\alpha}$ |
| $X \sim N(\mu_X, \sigma_X^2)$,<br>$Y \sim N(\mu_Y, \sigma_Y^2)$,<br>$\sigma_X^2 = \sigma_Y^2$ unbekannt. | $T = \frac{\bar{X} - \bar{Y} - \delta_0}{\sqrt{\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{m}\right) \frac{(n-1)S_X^2 + (m-1)S_Y^2}{n+m-2}}}$ | (a) $\lvert T \rvert > t_{1-\alpha/2}(n+m-2)$<br>(b) $T < -t_{1-\alpha}(n+m-2)$<br>(c) $T > t_{1-\alpha}(n+m-2)$ |
| $X \sim N(\mu_X, \sigma_X^2)$,<br>$Y \sim N(\mu_Y, \sigma_Y^2)$,<br>$\sigma_X^2, \sigma_Y^2$ unbekannt. | $T = \frac{\bar{X} - \bar{Y} - \delta_0}{\sqrt{\frac{S_X^2}{n} + \frac{S_Y^2}{m}}}$ | (a) $\lvert T \rvert > t_{1-\alpha/2}(k)$<br>(b) $T < -t_{1-\alpha}(k)$<br>(c) $T > t_{1-\alpha}(k)$ |
| $X, Y$ beliebig verteilt,<br>$n, m \geq 30$. | $T = \frac{\bar{X} - \bar{Y} - \delta_0}{\sqrt{\frac{S_X^2}{n} + \frac{S_Y^2}{m}}}$ | (a) $\lvert T \rvert > z_{1-\alpha/2}$<br>(b) $T < -z_{1-\alpha}$<br>(c) $T > z_{1-\alpha}$ |

wobei $k = (S_X^2/n + S_Y^2/m)^2 / \left((S_X^2/n)^2/(n-1) + (S_Y^2/m)^2/(m-1)\right)$

# Wilcoxon-Rangsummen-Test

Verteilungsfreie Alternative zu Gauß- und $t$-Tests.

Annahme:

Verteilungsfunktionen $F$ und $G$ von $X$ bzw. $Y$ haben gleiche Form, sind aber möglicherweise um ein Stück gegeneinander verschoben.

Idee:

Unter $H_0$: $x_{med} = y_{med}$ sind $F$ und $G$ identisch, d.h. $x$- und $y$-Werte kommen aus der gleichen Verteilung.

$\Rightarrow$ Bilde gepoolte Stichprobe $X_1, \ldots, X_n, Y_1, \ldots, Y_m$ und zugehörige Ränge $rg(X_1), \ldots, rg(Y_m)$. (Bei Bindungen: Durchschnittsränge vergeben.)

Teststatistik: $T_W =$ Summe der Ränge, die zu $x$-Werten gehören. Falls $F \neq G$: $T_W$ groß oder klein.

## Wilcoxon-Rangsummen-Test

Genauer:

- Annahmen:

  $X_1, \ldots, X_n$ unabhängig und identisch verteilt wie $X$,

  $Y_1, \ldots, Y_m$ unabhängig und identisch verteilt wie $Y$,

  $X_1, \ldots, X_n$ und $Y_1, \ldots, Y_m$ unabhängig,

  $X$ und $Y$ besitzen stetige Verteilungsfunktion $F$ bzw. $G$ mit gleicher Form, aber u.U. verschoben.

- Hypothesen:

$$\begin{array}{llcl} (a) & H_0 : x_{med} = y_{med} & \text{vs.} & H_1 : x_{med} \neq y_{med} \\ (b) & H_0 : x_{med} \geq y_{med} & \text{vs.} & H_1 : x_{med} < y_{med} \\ (c) & H_0 : x_{med} \leq y_{med} & \text{vs.} & H_1 : x_{med} > y_{med} \end{array}$$

# Wilcoxon-Rangsummen-Test

- Teststatistik:

$$T_W = \sum_{i=1}^{n} rg(X_i) = \sum_{i=1}^{n+m} iV_i$$

mit

$$V_i = \begin{cases} 1, & i\text{-te Beobachtung der geordneten gepoolten Stichprobe} \\ & \text{ist } X\text{-Variable} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

- Ablehnungsbereiche:

$$\begin{array}{ll} (a) & T_W < w_{\alpha/2}(n,m) \quad \text{oder} \quad T_W > w_{1-\alpha/2}(n,m) \\ (b) & T_W < w_{\alpha}(n,m) \\ (c) & T_W > w_{1-\alpha}(n,m) \end{array}$$

wobei $w_{\tilde{\alpha}}$ das tabellierte $\tilde{\alpha}$-Quantil der Verteilung von $T_W$ ist.

# Wilcoxon-Rangsummen-Test

Bemerkungen:

- Für $m$ oder $n > 25$ ist die Teststatistik approximativ normalverteilt, und zwar
$$N\left(\frac{n(n+m+1)}{2}, \frac{nm(n+m+1)}{12}\right).$$
- Verteilungsfreie Alternative zum Zwei-Stichproben-$t$-Test.

# $\chi^2$-Homogenitätstest

Ziel:

Test auf Gleichheit der Verteilungen von zwei oder mehr Variablen $X_1, X_2, \ldots, X_k$. Meist: $X_i$ Merkmal $X$ in $i$-ter Population oder unter $i$-ter Versuchsbedingung.

$X$ jeweils entweder kategorial mit $m$ Kategorien oder gruppiert in $m$ Klassen.

Daten zusammengefasst in Kontingenztabelle:

$$
\begin{array}{cc|ccc|c}
 & & \multicolumn{3}{c}{\text{Merkmalsausprägungen}} & \\
 & & 1 & \ldots & m & \\
\cline{3-5}
\multirow{5}{*}{\rotatebox{90}{Population}} & 1 & h_{11} & \ldots & h_{1m} & n_1 \\
 & 2 & h_{21} & \ldots & h_{2m} & n_2 \\
 & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
 & k & h_{k1} & \ldots & h_{km} & n_k \\
\cline{3-5}
 & \multicolumn{1}{c}{} & h_{\cdot 1} & \ldots & \multicolumn{1}{c}{h_{\cdot m}} &
\end{array}
$$

# $\chi^2$-Homogenitätstest

<u>Idee:</u>

Unter $H_0$: $P(X_1 = j) = \ldots = P(X_k = j)$ für $j = 1, \ldots, m$ sind die Verteilungen identisch.

$\Rightarrow \frac{h_{\cdot j}}{n}$ Schätzer für $P(X_i = j)$, $i = 1, \ldots, k$.

Da $h_{ij} \sim B(n_i, P(X_i = j))$ und $E(h_{ij}) = n_i\, P(X_i = j)$

$\Rightarrow \widetilde{h}_{ij} = n_i \, \frac{h_{\cdot j}}{n}$ erwartete Häufigkeit von $h_{ij}$ unter $H_0$.

Teststatistik $\chi^2$ vergleicht $h_{ij}$ und $\widetilde{h}_{ij}$ für alle $i, j$.

# $\chi^2$-Homogenitätstest

**Definition:** $\chi^2$-Homogenitätstest/$k$ Stichproben

- Annahmen: Unabhängige Stichprobenziehung in den $k$ Populationen.
- Hypothesen:

$$H_0: \; P(X_1 = j) = \cdots = P(X_k = j), \quad j = 1, \ldots, m$$

$$H_1: \; P(X_{i_1} = j) \neq P(X_{i_2} = j) \text{ für mindestens ein Tupel } (i_1, i_2, j)$$

- Teststatistik:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{m} \frac{\left(h_{ij} - \frac{n_i h_{\cdot j}}{n}\right)^2}{\frac{n_i h_{\cdot j}}{n}}$$

- Verteilung unter $H_0$: approximativ $\chi^2((k-1)(m-1))$
- Ablehnungsbereich: $\chi^2 > \chi^2_{1-\alpha}((k-1)(m-1))$

# Vergleiche aus verbundenen Stichproben

Bei unabhängigen Stichproben: Separate, unabhängige Stichproben; in getrennten Teilpopulationen.

<u>Jetzt:</u>

$X$ und $Y$ an gleichen Einheiten erhoben; meist Vorher-nachher-Situation bzw. wiederholte Messungen. I.d.R. sind Vergleiche von Lage-Parametern (insbes. Erwartungswerte) interessant.

# Vergleiche aus verbundenen Stichproben

Annahmen:

Stichprobenpaare $(X_1, Y_1), \ldots, (X_n, Y_n)$ unabhängig, aber $X_i$ und $Y_i$, $i = 1, \ldots, n$ jeweils abhängig.

Idee:

Zurückführung auf Ein-Stichproben-Fall durch Übergang zu Differenzen

$$D_i = X_i - Y_i, \;\; i = 1, \ldots, n$$

$$\Rightarrow D_1, \ldots, D_n \text{ i.i.d. wie } D = X - Y$$

Damit: $H_0\colon\; E(X) - E(Y) = \delta_0 \Leftrightarrow H_0\colon\; E(D) = \delta_0$

$\Rightarrow$ Ein-Stichproben-Tests auf Lage anwendbar.

# Zusammenhangsanalyse

Ziel:

Test auf Unabhängigkeit bzw. Korrelation von $X$ und $Y$

Annahme:

$(X_i, Y_i)$, $i = 1, \ldots, n$, i.i.d. wie $(X, Y)$

Beispiel: Sonntagsfrage

| | CDU/CSU | SPD | FDP | Grüne | Rest | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Männer | 144 | 153 | 17 | 26 | 95 | 435 |
| Frauen | 200 | 145 | 30 | 50 | 71 | 496 |
| insgesamt | 344 | 298 | 47 | 76 | 166 | 931 |

Frage: Geschlecht und Parteipräferenz abhängig?

**Definition:** $\chi^2$-Unabhängigkeitstest

- Annahme: Unabhängige Stichprobenvariablen $(X_i, Y_i)$, $i = 1, \dots, n$.
- Hypothesen:

$$
\begin{array}{lll}
H_0: & P(X=i, Y=j) = P(X=i) \cdot P(Y=j) & \text{für alle } i, j \\
H_1: & P(X=i, Y=j) \neq P(X=i) \cdot P(Y=j) & \text{für mind. ein Paar } (i, j)
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{cc|ccc|c}
 & & & Y & & \\
 & & 1 & \dots & m & \\
\hline
 & 1 & h_{11} & \dots & h_{1m} & h_{1\cdot} \\
X & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
 & k & h_{k1} & \dots & h_{km} & h_{k\cdot} \\
\hline
 & & h_{\cdot 1} & \dots & h_{\cdot m} & n
\end{array}
\quad \xrightarrow{\text{unter } H_0} \quad
\begin{array}{cc|ccc|c}
 & & & Y & & \\
 & & 1 & \dots & m & \\
\hline
 & 1 & \frac{h_{1\cdot} h_{\cdot 1}}{n} & \dots & \frac{h_{1\cdot} h_{\cdot m}}{n} & h_{1\cdot} \\
X & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
 & k & \frac{h_{k\cdot} h_{\cdot 1}}{n} & \dots & \frac{h_{k\cdot} h_{\cdot m}}{n} & h_{k\cdot} \\
\hline
 & & h_{\cdot 1} & \dots & h_{\cdot m} & n
\end{array}
$$

- Teststatistik:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{m} \frac{(h_{ij} - \tilde{h}_{ij})^2}{\tilde{h}_{ij}} \quad \text{mit} \quad \tilde{h}_{ij} = \frac{h_{i\cdot} h_{\cdot j}}{n}$$

- Verteilung von $\chi^2$ unter $H_0$: approximativ $\chi^2((k-1)(m-1))$
- Ablehnungsbereich:

$$\chi^2 > \chi^2_{1-\alpha}((k-1) \cdot (m-1))$$

Beispiel: Sonntagsfrage

- Berechnung von $\chi^2$ ergibt $\chi^2 = 20.065$.
- $(k-1)(m-1) = 4, \quad \chi^2_{0.95}(4) = 9.488, \quad 20.065 > 9.488.$
- Somit: $H_0$ bei $\alpha = 0.05$ ablehnen, d.h. signifikanter Zusammenhang zwischen Geschlecht und Parteipräferenz.

**Definition:** Korrelationstest

- Annahmen: Unabhängige gemeinsam normalverteilte Stichprobenvariablen $(X_i, Y_i)$, $i = 1, \ldots, n$.
- Hypothesen:

$$
\begin{array}{llll}
(a) & H_0 : \rho_{XY} = 0 & \text{vs.} & H_1 : \rho_{XY} \neq 0 \\
(b) & H_0 : \rho_{XY} \geq 0 & \text{vs.} & H_1 : \rho_{XY} < 0 \\
(c) & H_0 : \rho_{XY} \leq 0 & \text{vs.} & H_1 : \rho_{XY} > 0
\end{array}
$$

- Teststatistik:

$$T = \frac{r_{XY}}{\sqrt{1 - r_{XY}^2}} \sqrt{n-2}$$

- Ablehnungsbereiche:

$$(a) \quad |T| > t_{1-\alpha/2}(n-2)$$

$$(b) \quad T < -t_{1-\alpha}(n-2)$$

$$(c) \quad T > t_{1-\alpha}(n-2)$$