Prof. Dr. G. Tutz
Dipl.-Kfm. J. Ulbricht, M.Sc.
Dipl.-Math. A. Groll
Institut für Statistik

Bitte für die Korrektur freilassen!						
Aufgabe	1	2	3	4	5	Summe:
Punkte	20	20	20	30	30	120
erzielt						

Klausur zur Vorlesung „Einführung in die Wahrscheinlichkeitsrechnung und in die induktive Statistik“ (SS 08)

23. Juli 2008

Hinweise:

(a) Überprüfen Sie bitte, ob Ihre Angabe vollständig ist. Diese Angabe sollte (inklusive dieser Seite) 4 Seiten umfassen.

(b) Die Bearbeitungszeit beträgt 120 Minuten. Es können 120 Punkte erreicht werden.

(c) Als Hilfsmittel sind ausschließlich ein Taschenrechner (nicht programmierbar, ohne Plot-Funktion) sowie die Formelsammlung zugelassen.

(d) Bei Unterschleif gilt die Klausur als nicht bestanden und es erfolgt eine Meldung an das Prüfungsamt.

(e) Verwenden Sie für Ihre Notizen und Lösungen ausschließlich die Ihnen zur Verfügung gestellten Papierbögen.

(f) Alle Ausarbeitungen müssen nachvollziehbar sein. Die Ergebnisse müssen klar ersichtlich sein (unterstreichen bzw. Antwortsatz). Es erfolgt eine detaillierte Bepunktung des Lösungsweges. Runden Sie auf die dritte Nachkommastelle.

(g) Geben Sie bitte am Ende der Klausur alle von Ihnen zur Korrektur vorgesehenen Blätter ab und kennzeichnen Sie jedes abgegebene Blatt mit Name und Matrikelnummer.

Bitte ausfüllen und unterschreiben!!!

Name (in Druckbuchstaben): ____________________

Matrikelnummer: ____________________ *Studienfach:* ____________________

Geburtstag: ____________________ *Geburtsort:* ____________________

Ich bestätige, dass ich obige Hinweise zur Kenntnis genommen habe und sie befolgen werde. Ich bin mit einer Veröffentlichung meines Klausurergebnisses im Internet in der Form <Matrikelnummer><Note> einverstanden. (Falls nicht, den letzten Satz bitte streichen!)

Unterschrift: ____________________

Viel Erfolg!

Aufgabe 1	$9 + 4 + 7 = 20$ Punkte

Sie möchten Ihren Partner mit einem Kinobesuch überraschen. Da Sie die Karten im Vorverkauf erstehen möchten, müssen Sie sich bereits im voraus auf einen Film festlegen. Sie konnten an folgende Informationen gelangen:

- Durchschnittlich findet Ihr Partner jeden zweiten Film **langweilig** (L).
- Bei 30 Prozent der Filme wird derzeit eine Werbeaktion durchgeführt und es gibt einen Becher **Popcorn gratis** (G).
- Ihr Partner berichtet außerdem, dass nach seiner Erfahrung 60 Prozent der Filme **nicht** langweilig sind oder dass es dort gratis Popcorn gibt oder beides.

(a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass Ihr Partner einen Film **nicht** langweilig findet und Sie außerdem das Gratis-Popcorn erhalten!

In drei von zehn Filmen spielt der Schauspieler **Brat Pitt** mit (B), den Ihr Partner nicht ertragen kann. Sie wissen, dass die Wahrscheinlichkeit, dass Ihr Partner einen Film, in dem Brat Pitt mitspielt, **nicht** langweilig findet, 1/30 beträgt.

(b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass Ihr Partner einen zufällig ausgewählten Film **nicht** langweilig findet **und** Brat Pitt mitspielt?

(c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass Ihr Partner einen Film **ohne** Brat Pitt **nicht** langweilig findet?

Aufgabe 2	$6 + 6 + 8 = 20$ Punkte

Bei einem Digitalcomputer eines bestimmten Typs betrachtet man die Anzahl der Fehler als Zufallsvariable. Aus Erfahrung weiß man, dass die während einer einstündigen Betriebszeit zu erwartende Anzahl an Fehlern den Wert 0.25 annimmt.

(a) Welche Verteilung eignet sich zur näherungsweisen Beschreibung der beiden Zufallsvariablen:

- X : „Anzahl der Fehler innerhalb von 1 Stunde“
- Y : „Anzahl der Fehler innerhalb von 12 Stunden“

(b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass während einer 12-stündigen Betriebszeit mindestens 3 Fehler auftreten?

(c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass bei vier (voneinander unabhängigen) Digitalcomputern desselben Typs innerhalb von 12 Stunden genau ein Fehler auftritt?

Aufgabe 3	6 + 4 + 10 = 20 Punkte

Ein System besteht aus zwei parallelgeschalteten (und unabhängigen) identischen Komponenten X_1 und X_2, d.h. das System funktioniert so lange mindestens eine der beiden Komponenten funktionstüchtig ist. Die Lebensdauer einer Komponente sei exponentialverteilt.

(a) Zeigen Sie, dass die Lebensdauer des Systems die Verteilungsfunktion

$$P(Y \leq y) = F(y) = 1 - 2e^{-\lambda y} + e^{-2\lambda y}$$

besitzt. Betrachten Sie hierzu die Zufallsvariable $Y := \max\{X_1, X_2\}$.

(b) Bestimmen Sie die zugehörige Dichte.

(c) Mit welcher Wahrscheinlichkeit liegt die Lebensdauer des Systems zwischen 1 und 2 Stunden, wenn die durchschnittliche Lebensdauer einer Komponente 2 Stunden beträgt.

Aufgabe 4	8 + 7 + 15 = 30 Punkte

Ein Forschungsinstitut wird beauftragt, den Einfluss des Einkommens auf das Sparverhalten der Bürger des Landes „Phantasia" zu untersuchen. Das Institut stellt folgendes lineares Modell auf

$$y_t = x_{t0}\beta_0 + x_{t1}\beta_1 + \epsilon_t, \quad \epsilon_t \sim N(0, \sigma^2), \, \forall t, \quad E(\epsilon_t \epsilon_s) = 0, \, \forall t \neq s,$$

wobei y_t die Ersparnis in Mrd. Euro pro Jahr (logarithmiert) repräsentiert, x_{t0} in allen Perioden den Wert eins annimmt und x_{t1} für das Einkommen pro Jahr in Mrd. Euro (logarithmiert) steht. Aus den Daten der letzten Jahre sind folgende Zwischenergebnisse bereits bekannt:

$$X'X = \begin{bmatrix} 12 & 25 \\ 25 & 165 \end{bmatrix}, \quad X'y = \begin{bmatrix} 10.38 \\ 55.50 \end{bmatrix}, \quad y'y = 30.$$

(a) Berechnen Sie die KQ-Schätzer für β_0 und β_1. Interpretieren Sie Ihren Schätzer für β_1.

(b) Bestimmen Sie für die transponierte Designmatrix

$$X' = \begin{bmatrix} 1 & \dots & 1 \\ x_1 & \dots & x_n \end{bmatrix}$$

und für

$$y' = (y_1, \dots, y_n)$$

die generellen Terme von

$$X'X \quad \text{und} \quad X'y.$$

Geben Sie den Stichprobenumfang der Untersuchung an.

(c) Stellen Sie basierend auf obigem Modell für das kommende Jahr eine Prognose für die Ersparnis unter der Annahme auf, dass das unlogarithmierte Einkommen 12.185 Mrd. Euro betragen wird. Wie lautet das 90 Prozent-Konfidenzintervall?

Aufgabe 5	$5 + 14 + 6 + 5 = 30$ Punkte

Drei unterscheidbare Münzen wurden unabhängig voneinander insgesamt 240 mal geworfen, und jedesmal wurde die erscheinende Anzahl „Kopf" beobachtet. Die Ergebnisse sind im folgenden zusammengefasst:

0	mal Kopf	:	24
1	mal Kopf	:	108
2	mal Kopf	:	85
3	mal Kopf	:	23

(a) Sei X die erscheinende Anzahl „Kopf" beim dreifachen Münzwurf und $\pi_i = P(X = i)$, $i = 0, 1, 2, 3$. Zeigen Sie, dass im Fall idealer Münzen $\pi_0 = \pi_3 = 0.125$ und $\pi_1 = \pi_2 = 0.375$ gilt.

(b) Testen Sie mit Hilfe eines geeigneten Tests die Hypothese, dass es sich bei den drei Münzen um ideale Münzen handelt ($\alpha = 0.05$).

(c) Berechnen Sie den approximativen p-Wert der Realisation Ihrer Teststatistik aus Aufgabe (b).

(d) Erläutern Sie mit Hilfe einer Skizze, wie Sie für den in (b) verwendeten Test mit Hilfe des p-Wertes die Testentscheidung für beliebige Signifikanzniveaus treffen können.