

**Aufgabe 1**

9 + 4 + 7 = 20 Punkte

Sie möchten Ihren Partner mit einem Kinobesuch überraschen. Da Sie die Karten im Vorverkauf erstehen möchten, müssen Sie sich bereits im voraus auf einen Film festlegen. Sie konnten an folgende Informationen gelangen:

- Durchschnittlich findet Ihr Partner jeden zweiten Film **langweilig** (L).
  - Bei 30 Prozent der Filme wird derzeit eine Werbeaktion durchgeführt und es gibt einen Becher **Popcorn gratis** (G).
  - Ihr Partner berichtet außerdem, dass nach seiner Erfahrung 60 Prozent der Filme **nicht** langweilig sind oder dass es dort gratis Popcorn gibt oder beides.
- (a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass Ihr Partner einen Film **nicht** langweilig findet und Sie außerdem das Gratis-Popcorn erhalten!

In drei von zehn Filmen spielt der Schauspieler **Brat Pitt** mit (B), den Ihr Partner nicht ertragen kann. Sie wissen, dass die Wahrscheinlichkeit, dass Ihr Partner einen Film, in dem Brat Pitt mitspielt, **nicht** langweilig findet,  $1/30$  beträgt.

- (b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass Ihr Partner einen zufällig ausgewählten Film **nicht** langweilig findet **und** Brat Pitt mitspielt?
- (c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass Ihr Partner einen Film **ohne** Brat Pitt **nicht** langweilig findet?

**Aufgabe 2**

5 + 5 + 5 = 15 Punkte

Fluggäste, die Plätze für einen Flug reserviert haben, erscheinen unabhängig voneinander mit einer Wahrscheinlichkeit von lediglich 0.95 auch am Gate. Eine Fluggesellschaft weiß dies und verkauft daher 108 Tickets für die 105 verfügbaren Plätze eines bestimmten Fluges.

- (a) Bestimmen Sie ein geeignetes Verteilungsmodell für die Zufallsvariable  $X$  : „Anzahl der zu dem betrachteten Flug nicht erscheinenden Fluggäste“. Welche Annahmen haben Sie bei Ihrer Modellwahl getroffen?
- (b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass alle erscheinenden Fluggäste einen Platz bekommen.
- (c) Vergleichen Sie die unter (b) bestimmte Wahrscheinlichkeit mit der, die Sie unter Verwendung einer geeigneten approximativen diskreten Verteilung erhalten. Begründen Sie dabei die Anwendbarkeit des gewählten Approximationsmodells.

**Aufgabe 3**

10 Punkte

$X$  und  $Y$  seien zwei Zufallsvariablen, deren gemeinsame Dichtefunktion folgende Form hat

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \frac{3}{11}(x^2 + y), & 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 1, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Bestimmen Sie die Kovarianz von  $X$  und  $Y$ .

**Aufgabe 4**

13 + 17 + 10\* = 30 + 10\* Punkte

Sei  $X_1, \dots, X_n$  eine einfache Zufallsstichprobe aus einer Grundgesamtheit mit folgender Wahrscheinlichkeitsfunktion

$$P_\theta(X = x) = \theta^x(1 - \theta)^{1-x}, \quad x \in \{0, 1\}, \quad 0 < \theta < 1.$$

- (a) Bestimmen Sie einen Schätzer für den unbekannt Parameter  $\theta$  nach der Maximum-Likelihood-Methode  $\hat{\theta}_1$  und einen Schätzer nach der Momentenmethode  $\hat{\theta}_2$ .
- (b) Ermitteln Sie für beide Schätzer, ob sie MSE-konsistent sind. Wie kann man das Konzept der MSE-Konsistenz anschaulich interpretieren?
- (c\*) **Zusatzaufgabe:** Man möchte  $\theta$  so schätzen, dass der Abstand zwischen Maximum-Likelihood-Schätzer  $\hat{\theta}_1$  und wahren Parameterwert  $\theta$  höchstens 0.05 beträgt. Wie groß muss der Stichprobenumfang mindestens sein, damit dieser Abstand mit einer Wahrscheinlichkeit von 0.9 eingehalten wird, dass also gilt

$$P(|\hat{\theta}_1 - \theta| \leq 0.05) \geq 0.9.$$

Betrachten Sie hierzu die Zufallsvariable  $Y := \hat{\theta}_1 - \theta$  und verwenden Sie die Normalapproximation.

**Aufgabe 5**

9 + 8 + 8 + 10\* = 25 + 10\* Punkte

Aus einer Gesamtheit von Männern, die sich einer stationären Entwöhnungsbehandlung für Alkoholabhängige unterzogen hatten, wurde eine Stichprobe vom Umfang  $n = 800$  gezogen. Nach 18 Monaten hatten von diesen 290 ihr Trinkverhalten nicht verändert.

- (a) Bestimmen Sie ein 0.99-Konfidenzintervall für die Mißerfolgswahrscheinlichkeit  $p$  der Behandlung.
- (b) Angenommen, es handele sich um eine Vorstudie einer noch größeren Untersuchung. Wieviele Patienten müssten in die Studie aufgenommen werden, damit das entsprechend zu (a) aufgestellte Konfidenzintervall höchstens die Länge 0.05 aufweist?
- (c) Wieviele Patienten müssten bei der Fragestellung unter (b) betrachtet werden, wenn die Vorinformationen über  $p$  aus der Stichprobe **nicht** gegeben sind?
- (d\*) **Zusatzaufgabe:** Bestimmen Sie ein approximatives 0.99-Konfidenzintervall für das Risiko  $(1-p)/p$  eines Mißerfolgs der Behandlung mit Hilfe der Delta-Methode.